Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme di tutte le possibili soluzioni) della seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{x^2 - y}{2x}, \qquad x > 0$$

$$y' = -\frac{y}{2x} + \frac{x}{2}; \qquad y' + \frac{1}{2x}\,y = \frac{x}{2}$$

L'equazione assegnata è un'eq. diff. lineare non omogenea del primo ordine.

per $x>0$ valutiamo $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log|x| + c = \log\sqrt{|x|} + c$

$$e^{\int \frac{dx}{2x}} = e^{\log\sqrt{|x|} + c} =$$

$= e^{c}\sqrt{|x|} = \sqrt{x}$, per $x>0$ (scegliamo $c=0$)

moltiplichiamo l'eq. diff assegnata per $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x}\,y' + \frac{\sqrt{x}}{2x}\,y = \frac{x\sqrt{x}}{2}, \qquad x>0$$

$$\sqrt{x}\,y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,y = \frac{1}{2}x^{3/2}, \qquad x>0$$

osserviamo che $(\sqrt{x}\,y)' = D(\sqrt{x}\,y) = \sqrt{x}\,y' + (D\sqrt{x})\,y$

$= \sqrt{x}\,y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,y$, per la regola di derivazione del prodotto. Pertanto si ha

$(\sqrt{x}\,y)' = \frac{1}{2}x^{3/2}$, da cui effettuando l'integrazione indefinita di ambo i membri, si ha

$$\sqrt{x}\,y(x) = \int (\sqrt{x}\,y)'\,dx = \frac{1}{2}\int x^{3/2}\,dx = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{\cancel{2}}} + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

cioè

$$\sqrt{x}\,y(x) = \frac{1}{5}x^2\sqrt{x} + c \Longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}}, \quad x>0}$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x^2 - y}{2x} \quad \text{è} \quad \left\{ y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}},\ x>0 : c \in \mathbb{R} \right\}$$
$x>0$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 - y}{2x}, \ x>0 \\ y(1) = y_0 \end{cases} \quad \text{con } y_0 \in \mathbb{R}$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari sappiamo che $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy assegnato ammette un'unica soluzione definita in $(0,+\infty)$. Per determinare tale soluzione scegliamo la costante "c" nell'integrale generale in modo tale che la soluzione soddisfi la condizione $y(1) = y_0$

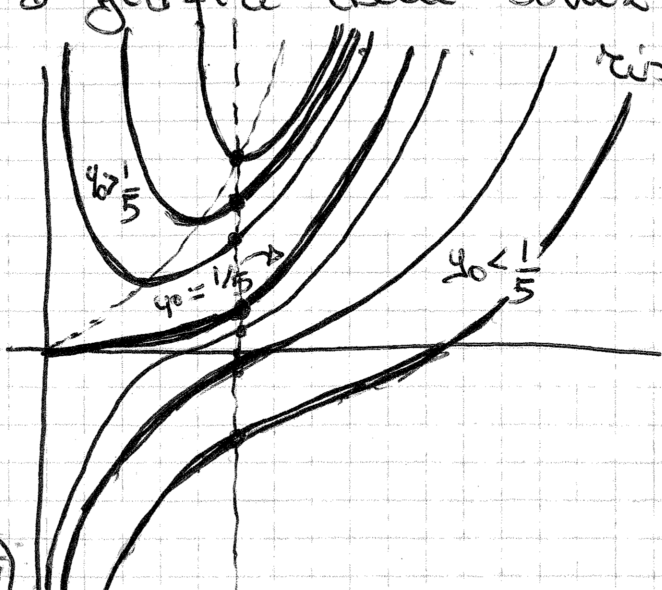
$$y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}},\ x>0 \quad \text{con} \quad y(1) = y_0$$

$$y_0 = y(1) = \left[\frac{1}{5}x^2 + \frac{c}{\sqrt{x}}\right]_{x=1} = \frac{1}{5} + c \implies c = y_0 - \frac{1}{5}$$

da cui la soluzione del problema assegnato è

$$y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right)\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0; \quad \forall\, y_0 \in \mathbb{R}$$

I grafici delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ risultano i seguenti



[Ricordiamo che per il teorema di Cauchy, di esistenza e unicità locale, i grafici di 2 soluzioni distinte <u>dell'equazione assegnata</u> non possono intersecarsi]

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine.

$$y' + \frac{y}{x \log x} = x^2 , \qquad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Valutiamo $\displaystyle\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x} dx = \log|\log x| + c$

$$e^{\int \frac{dx}{x \log x}} = e^{\log|\log x| + c} = e^{c} |\log x| =$$

$$= |\log x| = \begin{cases} \log x , & x > 1 \\ -\log x , & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad [\text{scegliamo } c = 0]$$

moltiplichiamo l'equazione assegnata per $\log x$

$$(\log x) y' + \frac{y}{x} = x^2 \log x , \qquad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$((\log x) y)' = x^2 \log x \quad \Rightarrow (\log x)\, y(x) = \int x^2 \log x \, dx$$

Calcoliamo $\int x^2 \log x \, dx$, servendoci della regola di integrazione per parti.

$$\underline{\int x^2 \log x \, dx} = \frac{1}{3} x^3 \log x - \int \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3} \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \log x & g(x) = \frac{x^3}{3} \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g'(x) = x^2 \end{array}} \quad = \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

da cui $\quad (\log x)\, y(x) = \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + c$

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{9} \frac{x^3}{\log x} + \frac{c}{\log x} , \qquad x \in (0,1) \text{ oppure } x \in (1,+\infty)$$

Ricordiamo che possiamo definire le soluzioni di una eq. diff. solo in un intervallo e non in un'unione di intervalli disgiunti; pertanto la restrizione della funzione $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}\frac{x^3}{\log x} + \frac{c}{\log x}$ (per un fissato $c \in \mathbb{R}$)

agli intervalli $(0,1)$ e $(1,+\infty)$ rispettivamente, devono essere considerate due soluzioni distinte dell'eq. diff. e non l'una come un prolungamento dell'altra, cioè come un'unica soluzione definita in $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

Osservazione L'integrale generale delle equazioni proposte può essere determinato anche servendosi direttamente della formula risolutiva di Duhamel.

Determinare l'integrale generale della seguente equazione logistica.

$$y' = y - y^2$$

L'eq. diff assegnata è non lineare, ma a variabili separabili. Determiniamo, innanzitutto, le soluzioni costanti dell'equazione.

$$y - y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1$$

Quindi $y(x) = 0$ e $y(x) = 1$ sono soluzioni costanti dell'eq. differenziale assegnata.

Supposto $y(x) - [y(x)]^2 \neq 0 \quad \forall x \in X_y$ (campo di esistenza della soluzione $y(x)$)

dividiamo ambo i membri dell'eq. differ. per $y - y^2$. Si ha quindi

$$\frac{y'}{y(1-y)} = 1$$

$$y'\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) = 1$$

$$\frac{y'}{y} - \frac{y'}{y-1} = 1$$

Servendosi della regola di decomposizione in fratti semplici, si ha

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}, \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

$$1 = A(1-y) + By$$

$$y = 0 \Rightarrow A = 1; \quad y = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}$$

$\frac{y'}{y} - \frac{y'}{y-1} = 1$ Effettuando l'integrazione indefinita di ambo i membri si ha

$$\int \frac{y'}{y} dx - \int \frac{y'}{y-1} dx = \int dx$$

$$\log|y| - \log|y-1| = x + c$$

$$\log|y| - \log|y-1| = -\log\frac{|y-1|}{|y|} = -\log\left|1-\frac{1}{y}\right|$$

$$-\log\left|1-\frac{1}{y}\right| = x + c \Rightarrow \log\left|1-\frac{1}{y}\right| = -x - c$$

$$\left|1-\frac{1}{y}\right| = e^{-x-c} = e^{-c}\,e^{-x} = \frac{e^{-x}}{e^{c}}$$

$$1-\frac{1}{y} = \pm\frac{e^{-x}}{e^{c}}$$ indichiamo con $\frac{1}{K} = \pm\frac{1}{e^{c}}$

quindi $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$1-\frac{1}{y} = \frac{e^{-x}}{K}$$

$$1-\frac{e^{-x}}{K} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{K-e^{-x}}{K} = \frac{1}{y} \Rightarrow y(x) = \frac{K}{K-e^{-x}}$$

L'integrale generale dell'equazione logistica è quindi costituito da

$y(x)=0$; $y(x)=1$; $y(x) = \frac{K}{K-e^{-x}}$, $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

cioè $y(x) = 1$ e $y(x) = \frac{K}{K-e^{-x}}$, $K \in \mathbb{R}$

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ con $y_0 \in \mathbb{R}$

Indichiamo con X_y il campo di esistenza della soluzione $y(x)$

Se $y_0 = 1 \Rightarrow y(x) = 1$, $X_y = \mathbb{R}$

Se $y_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 0$, $X_y = \mathbb{R}$

Se $y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, imponiamo che la generica soluzione non costante $y(x) = \frac{K}{K - e^{-x}}$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = y_0$

$y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $\quad y_0 = y(0) = \frac{K}{K-1} \Rightarrow \frac{K}{K-1} = y_0$

$1 - \frac{1}{K} = \frac{1}{y_0}$; $1 - \frac{1}{y_0} = \frac{1}{K}$; $K = \frac{y_0}{y_0 - 1}$,

quindi

$$y(x) = \frac{\frac{y_0}{y_0-1}}{\frac{y_0}{y_0-1} - e^{-x}} \; ; \quad y(x) = \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)e^{-x}}$$

Pertanto $\forall y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$y(x) = \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)e^{-x}}$$

Se $y_0 \in (0,1)$ $\quad y_0 - (y_0 - 1)e^{-x} = y_0 + (1 - y_0)e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X_y = \mathbb{R}$ $\quad [y_0 \in (0,1) \Rightarrow y_0 > 0 \text{ e } 1 - y_0 > 0]$

Se $y_0 \in (1, +\infty)$

$y_0 - (y_0 - 1)e^{-x} = 0$; $\quad y_0 = (y_0 - 1)e^{-x}$; $\quad e^{x} = \frac{y_0 - 1}{y_0}$

$y_0 > 1 \Rightarrow \frac{y_0 - 1}{y_0} > 0$; $\quad x = \log\left(\frac{y_0 - 1}{y_0}\right) = -\log\left(\frac{y_0}{y_0 - 1}\right)$

$y_0 > 1 \Rightarrow \frac{y_0}{y_0 - 1} > 1 \Rightarrow \log\left(\frac{y_0}{y_0 - 1}\right) > 0$

$$X_y = \left(-\log\left(\frac{y_0}{y_0 - 1}\right); +\infty\right)$$

Se $y_0 < 0$

$y_0 - (y_0 - 1)e^{-x} = 0$; $\quad e^{x} = \frac{y_0 - 1}{y_0}$; $\quad e^{x} = 1 - \frac{1}{y_0}$

$y_0 < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{y_0} > 1 \Rightarrow x = \log\left(1 - \frac{1}{y_0}\right) > 0$

$$X_y = \left(-\infty; \log\left(1 - \frac{1}{y_0}\right)\right)$$

Se $y_0 > 1$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1) e^{-x}} = 1$

$\lim_{x \to -\log\left(\frac{y_0}{y_0 - 1}\right)^+} \frac{y_0}{y_0 - (y_0-1) e^{-x}} = +\infty$

Se $y_0 \in (0, 1)$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) e^{-x}} = 1$

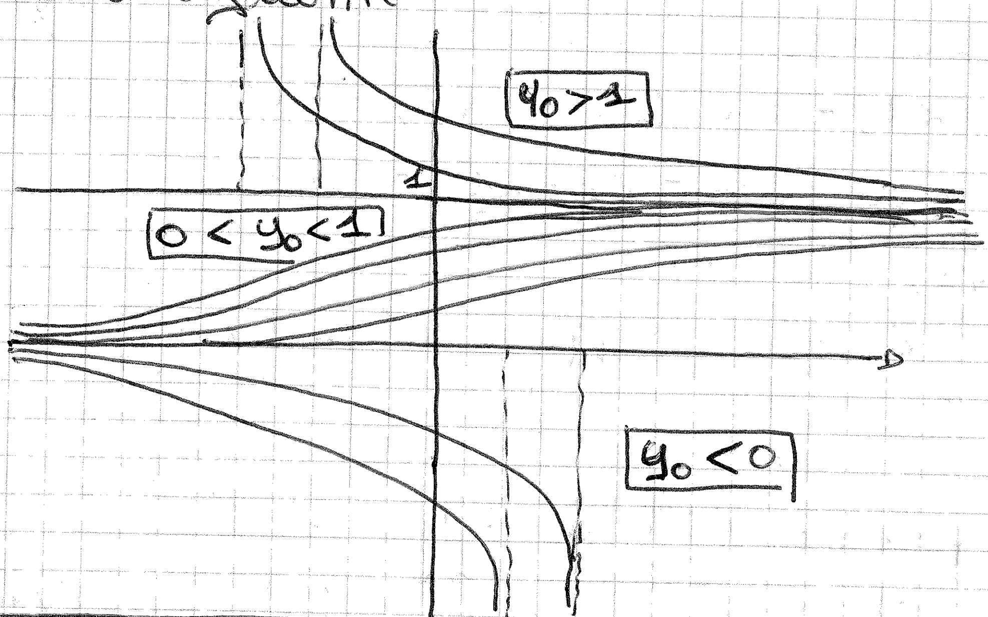
$\lim_{x \to -\infty} \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0) e^{-x}} = 0^+$

---

se $y_0 < 0$ $\lim_{x \to \log\left(1 - \frac{1}{y_0}\right)^-} \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1) e^{-x}} = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1) e^{-x}} = 0^-$

I grafici delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ risultano i seguenti



Determinare l'integrale generale delle seguenti eq. diff. lineare non omogenee del 2° ordine

a) $y'' - 2y' - 3y = e^{x}(2x+1)$

b) $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(2x+1)$

Consideriamo l'eq. diff. lineare omogenea associata
$y''-2y'-3y=0$ il suo polinomio caratteristico è
$p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3$; $\lambda^2-2\lambda-3=0$ $\lambda_1=-1 \vee \lambda_2=3$
l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea associata è
$$y(x)=c_1 e^{-x}+c_2 e^{3x} \quad , c_1,c_2\in\mathbb{R}$$
l'integrale generale dell'eq. diff. a) è
$$y(x)=c_1 e^{-x}+c_2 e^{3x}+v(x)$$
con $v(x)$ soluzione particolare dell'eq. diff. (a) del tipo
$V(x)=e^x(ax+b)$, poichè il parametro $\alpha=1$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$.
I parametri a e $b\in\mathbb{R}$, si determinano imponendo che $V(x)$ sia soluzione dell'eq. diff. (a).
$$V(x)=e^x(ax+b)$$
$$V'(x)=e^x(ax+b)+e^x(a)=e^x(ax+b+a)$$
$$V''(x)=e^x(ax+b+a)+e^x a=e^x(ax+b+2a)$$
Si deve avere che $V''-2V'-3V=e^x(2x+1)$
$$e^x(ax+b+2a)-2e^x(ax+b+a)-3e^x(ax+b)=e^x(2x+1)$$
$$\cancel{e^x}(ax+b+\cancel{2a}-2ax-2b-\cancel{2a}-3ax-3b)=\cancel{e^x}(2x+1)$$
$$(-4ax-4b)=2x+1$$
$$\begin{cases}-4a=2\\-4b=1\end{cases} \quad \begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases} \quad V(x)=e^x\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)$$
l'integrale generale dell'eq. diff. a) è
$$y(x)=c_1 e^{-x}+c_2 e^{3x}-\frac{1}{4}e^x(2x+1) \quad \boxed{c_1,c_2\in\mathbb{R} \quad x\in\mathbb{R}}$$

---

l'integrale generale dell'eq. diff. b) è
$$y(x)=c_1 e^{-x}+c_2 e^{3x}+W(x)$$
con $W(x)$ soluzione particolare dell'eq. diff. b) del tipo
$W(x)=e^{-x}(ax+b)x$, poichè il parametro $\alpha=-1$ è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ con molteplicità $m=1$

I parametri $a, b \in \mathbb{R}$ si determinano imponendo che $w(x)$ sia soluzione dell'eq. diff. b)

$$w(x) = e^{-x}(ax+b)x = e^{-x}(ax^2+bx)$$

$$w'(x) = -e^{-x}(ax^2+bx) + e^{-x}(2ax+b) = e^{-x}(-ax^2+(2a-b)x+b)$$

$$w''(x) = -e^{-x}(-ax^2+(2a-b)x+b) + e^{-x}(-2ax+2a-b) =$$
$$= e^{-x}(ax^2+(-4a+b)x+2a-2b)$$

Si deve avere che $w''-2w'-3w = e^{-x}(2x+1)$

$$e^{-x}(ax^2+(-4a+b)x+2a-2b) +$$
$$-2e^{-x}(-ax^2+(2a-b)x+b) - 3e^{-x}(ax^2+bx) = e^{-x}(2x+1)$$

$$\cancel{e^{-x}}(\cancel{ax^2} - 4ax + \cancel{bx} + 2a - 2b +$$
$$+ \cancel{2ax^2} - 4ax + \cancel{2bx} - 2b - \cancel{3ax^2} - \cancel{3bx}) = \cancel{e^{-x}}(2x+1)$$

$$-8ax + 2a - 4b = 2x+1$$

$$\begin{cases} -8a = 2 \\ 2a - 4b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$w(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x\right)$$

L'integrale generale dell'eq. diff. b) è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x\right)$$

$$y(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + c_1\right) + c_2 e^{3x} \qquad \boxed{\begin{array}{l} c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = e^{x}(2x+1) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

~~Per risolvere~~ Dalla teoria delle eq. diff. lineari sappiamo che il problema di Cauchy assegnato ammette un'unica soluzione definita in $\mathbb{R}$.

Per determinare tale soluzione dobbiamo scegliere le costanti c_1, c_2 nell'integrale generale dell'eq. diff. a) in modo tale che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali assegnate.

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{4} e^{x}(2x+1)$$

$y(0) = 1 \Rightarrow \quad 1 = y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = \frac{5}{4}$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x} - \frac{1}{4} e^{x}(2x+3)$$

$y'(0) = -1 \Rightarrow \; -1 = y'(0) = -c_1 + 3c_2 - \frac{3}{4} \Rightarrow -c_1 + 3c_2 = -\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{5}{4} \\ -c_1 + 3c_2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{5}{4} - c_2 = 1 \\ c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$// \quad 4c_2 = 1$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x} - \frac{1}{4} e^{x}(2x+1), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 5x^2 \\ y(0) = \\ y'(0) = \end{cases}$$

Determiniamo l'integrale generale dell'eq. diff omogenea associata $\quad y'' - 2y' + 5y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \quad ; \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad ; \quad \lambda = 1 \pm 2i$

$$y(x) = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

L'integrale generale dell'eq. diff $\; y'' - 2y' + 5y = 5x^2 \;$ è

$$y(x) = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + V(x)$$

con $V(x)$ soluzione particolare del tipo $V(x) = ax^2 + bx + c$ poiché il parametro $\alpha = 0$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$. I parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ si determinano imponendo che $V(x)$ sia soluzione dell'eq. diff assegnata.

$V(x) = ax^2 + bx + c \qquad V'(x) = 2ax + b \qquad V''(x) = 2a$

Si deve avere $V'' - 2V' + 5V = 5x^2$

$$2a - 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = 5x^2$$

$$5ax^2 + (5b - 4a)x + 2a - 2b + 5c = 5x^2$$

$$\begin{cases} \cancel{5}a = \cancel{5}1 \\ 5b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + 5c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{2}{5}(b - a) = -\frac{2}{25} \end{cases}$$

$$V(x) = x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}$$

L'integrale generale dell'eq. diff. assegnata è

$$y(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}$$

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy assegnato dobbiamo scegliere le costanti c_1, c_2 nell'integrale generale in modo tale che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali.

$$y'(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x - 2c_1 \operatorname{sen} 2x) + \\ + 2x + \frac{4}{5}.$$

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 - \frac{2}{25} \\ 1 = y'(0) = c_1 + 2c_2 + \frac{4}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 + \frac{2}{25} = \frac{27}{25} \\ c_2 = \left(\frac{1}{5} - c_1\right)\frac{1}{2} = -\frac{11}{25} \end{cases}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è:

$$y(x) = e^x\left(\frac{27}{25} \cos 2x - \frac{11}{25} \operatorname{sen} 2x\right) + x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}$$