Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009, EBI
Scienze Ecologiche e della Biodiversità
27 novembre 2008

Notazione dei numeri complessi - Con insieme dei numeri complessi s'intende l'insieme della espressioni $a+ib$ ove $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ e il parametro i è una costante *non reale* a cui *si impone* la regola di calcolo $i^2=-1$. I numeri reali si identificano con i numeri complessi del tipo $a+i0$. Somma e prodotto di numeri complessi sono quindi quelli dei polinomi nella "variabile" i con coefficienti reali, solo che nei calcoli si usa la regola data per ridursi sempre a polinomi di primo grado. Quindi

$$(a+ib)+(x+iy)=(a+x)+i(b+y);$$
$$(a+ib)(x+iy)=ax+aiy+ibx+ibiy=ax+iay+ibx+i^2by=(ax-by)+i(ay+bx)$$

Quindi ogni numero complesso $a+ib$ nonullo ha un reciproco $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Considerando l'insieme dei numeri complessi con tali operazioni si parla di campo dei numeri complessi, che si indica con $\mathbf{C}$. Spesso $\mathbf{C}$ si identifica con $\mathbf{R}^2$: $a+ib \sim (a,b)$. Il coniugato di un numero complesso $z=x+iy$ si indica con $\overline{z}$ ed è $x-iy$ (simmetrico rispetto all'asse orizzontale). Il modulo di un numero complesso $z=x+iy$ è la distanza dall'origine del corrispondente punto nel piano cartesiano $\sqrt{x^2+y^2}$ e si indica con $|z|$, e si dice *modulo* di z. Si ha $|z|^2=z\overline{z}$: q uindi $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$. La convergenza di numeri complessi è quella delle coppie di numeri reali associati: in particolare $z_n \to z$ è $|z_n-z| \to 0$.

- **Forma trigonometrica** Considerando le coordinate polari nel piano ogni numero complesso si scrive nella forma $\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. L'angolo φ non è individuato se non a meno di multipli di 2π: *e.g.* se $a>0$, $b>0$ allora $a+ib=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\ \text{artan}\frac{b}{a}+\sin\ \text{artan}\frac{b}{a})$. Si ha $\rho=|z|$, e $\varphi \in [0;2\pi[$ si dirà *argomento principale*: $arg z$.

- Dalle formule di addizione se $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ si ha:

$$\textbf{(*)} zw=\rho r(\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta))$$

- **Radici** n^e Quindi ogni numero complesso $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ha esattamente n radici n^e complesse

$$z_1=\sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n})\ldots z_n=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}+\frac{\varphi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}+\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

Le radici n^e di un numero complesso di modulo 1 sono quindi i vertici di un *poligono regolare* inscritto nella circonferenza untitaria.

Forma esponenziale Considerando il modulo di un numero complesso come esponenziale e osservando che **(*)** il prodotto di numeri complessi ha come argomento la somma degli argomenti riportata in $[0;2\pi[$ si definisce $e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)=e^{\alpha}e^{i\beta}$ constatando che *ha le stesse regole di calcolo* dell'esponenziale. Solo che *non è iniettiva*! In più si riesce a dimostrare che $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to e^z,\ n\to+\infty$ e da quanto detto sulle serie di Taylor di esponenziale, seno e coseno si ha anche $1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots\frac{z^n}{n!}\to e^z$

OSSERVAZIONE si definisce uno *spazio vettoriale su* $\mathbf{C}$, piuttosto che su $\mathbf{R}$, ammettendo "dilatazioni per fattori" complessi. Uno spazio vettoriale complesso di dimensione n è anche uno spazio vettoriale reale di dimensione $2n$.

Teorema 1 FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA Ogni polinomio a coefficienti complessi $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ di grado n è prodotto di termini del tipo $(z-w)^k$ per a_n. I numeri w sono tutte le radici del polinomio, i k sono sono chiamate molteplicità e la loro somma è n. Un polinomio a coefficienti reali se ha come radice $w=a+ib$ *ha anche* come radice $a-ib$ (il coniugato di una somma è la somma dei coniugati, il coniugato di un prodotto il prodotto dei coniugati, i coefficienti essendo reali sono eguali ai loro coniugati). Per cui un polinomio a coefficienti reali è prodotto di termini del tipo $(x-c)^k$, $((x-a)^2+b^2)^h=(x-(a+ib))^h(x-(a-ib))^h$, ove c sono le radici reali e la somma degli k e dei $2h$ è il grado del polinomio.