Soluzioni per i problemi del 12 Febbraio 2010

1 Gli anagrammi di una parola di 8 lettere distinte sono $8!$
se vi sono lettere ripetute k volte $k!$ tra gli $8!$ sono eguali
"torrette" 8 lettere: 1 o, 2 e, 2 r, 3 t il numero di anagrammi
è quindi $\dfrac{8!}{2!\,2!\,3!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cancel{4\cdot 3\cdot 2}}{\cancel{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2}} = 56\cdot 30 = 1680$

2 $\log\dfrac{1}{\sin x}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} > 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x > 0$

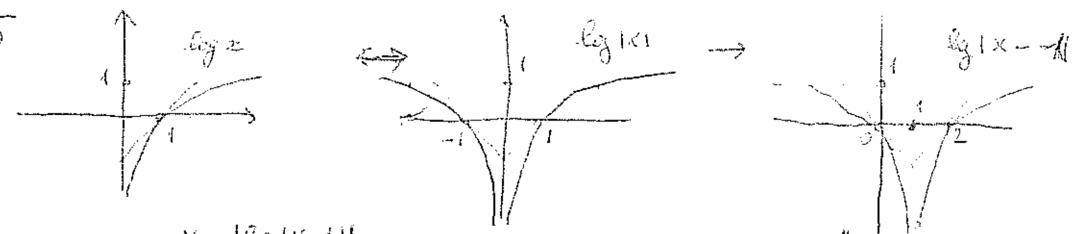
$\Longleftrightarrow \quad 2k\pi \underset{\neq}{<} x \underset{\neq}{<} (2k+1)\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

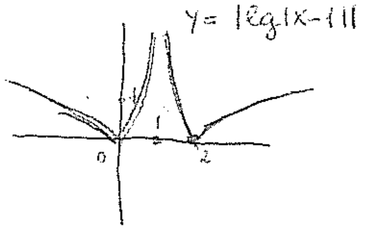
3 Si ordinano i dati essendo numerici.
2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8
l'ultimo quartile è il "$\frac{3}{4}$-tile", i dati sono 10
$\frac{3}{4}\times 10$ non è intero, quindi vi è solo un valore
di ultimo quartile: quello di posto "parte intera
di $\frac{3}{4}\cdot 10 = 7{,}5$" $+1 = 7+1 = 8$
Quindi il valore di ultimo quartile è 6.
La media è $\frac{1}{10}(2+3+4+4+5+5+6+6+7+8) = 5$

la varianza $\quad \frac{1}{10}(4+9+16+16+25+25+36+36+49+64) - 25 = 3$
$\left(\frac{1}{10}\left((-3)^2+(-2)^2+2(-1)^2+2\cdot 0^2+2(1)^2+2^2+3^2\right) = 3\right)$.

4 Si sottointende che la precisione con cui si approssima π
è arbitraria e quindi può essere trattato come costante
altezza $= \dfrac{\text{Volume}}{(\text{raggio})^2\pi} = \text{Volume}\cdot\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(\text{raggio})^2}$ $\quad$ errore rel. vol $= \frac{1}{35}$
errore rel. raggio $= \frac{1}{50}$
errore rel altezza $\le$ err. rel. Vol $+$ err rel $\dfrac{1}{(\text{raggio})^2} \le \dfrac{1}{35} +$ err rel $(\text{raggio})^2$
$\le \dfrac{1}{35} + 2$ err rel raggio $= \dfrac{1}{35} + \dfrac{2}{50} = \dfrac{12}{175} \le 0{,}07 = \dfrac{7}{100}$

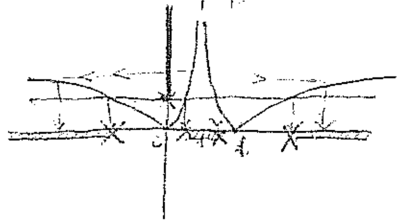
5





$|\lg|x-1|| > 1$

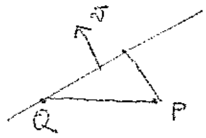
$y > 1$



6 distanza $P(\alpha,\beta,\gamma)$ dal piano di equazione $ax + by + cz = d$ $\quad (a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0))$

$$= \frac{|\alpha a + b\beta + c\gamma - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|(P-Q)\cdot v|}{|v|}$$

ove Q è un qualsiasi punto del piano ($Q \cdot v = d$) e v un qualsiasi vettore non nullo ortogonale



$P(1,2,3) \qquad Q(1,-1,1) \qquad v(1,1,1)$

$(P-Q)(0,3,2)$

$$\frac{3+2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

7 $\quad x\cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)\right) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720} + O(x^9)$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720} + o(x^8)$$

quindi il polinomio di Taylor cercato è $p(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720}$

poiché $\dfrac{x\cos x - p(x)}{x^8} = \dfrac{o(x^8)}{x^8} \longrightarrow 0$ per $x \to 0$

8 L'area di $\{(x,y): 1 \le x \le e,\ 0 \le yx \le \lg x\} =$

$= \{(x,y): 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \frac{\lg x}{x}\}$

poiché per $x \in [1,e]$ $\frac{\lg x}{x} \ge 0$ la regione è la parte di piano tra l'asse orizzontale e il grafico di $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ per $x \in [1,e]$

Quindi la sua area è l'integrale di $f(x)$ su $[1,e]$:

$$\text{Area} = \int_1^e \frac{\lg x}{x}\,dx = \int_1^e (\log x)\frac{d \lg x}{dx}\,dx \overset{\log x = \tau}{=}$$

$$= \int_0^1 \tau\, d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

9 $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 1$:

- soluzioni omogenea $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$
  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $(\lambda-3)^2 = 0$ 3 molt. 2

  $y(t) = ae^{3t} + bte^{3t}$ $a, b \in \mathbb{R}$
- Soluzione particolare: il termine noto $1 = e^{0 \cdot t}$ e 0 non è soluzione del polinomio caratteristico si cerca una soluzione del tipo $z(t) \equiv \alpha$ costante

  $z' \equiv 0$, $z'' \equiv 0$ imponendo che $z \equiv \alpha$ sia soluzione

  $z'' - 6z' + 9z = 1$ $\alpha \cdot 9 = 1$ $\alpha = \frac{1}{9}$
- Le soluzioni sono tutte e sole

  $x(t) = y(t) + z(t) = (a + bt)e^{3t} + \frac{1}{9}$

10 Si tratta di trovare due vettori (a, b, c) e (α, β, γ) per cui

1) lunghezza (a,b,c) = lunghezza$(\alpha, \beta, \gamma) = 1$

2) $(a, b, c) \perp (\alpha, \beta, \gamma)$ mutua ortogonalità

$(a, b, c) \perp (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$(\alpha, \beta, \gamma) \perp (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

e ordinarli in modo che

3) $\det\begin{pmatrix} a & \alpha & 1/3 \\ b & \beta & 2/3 \\ c & \gamma & 2/3 \end{pmatrix} > 0$ orientato come il riferimento $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

2) Per trovare due vettori tra loro ed ortogonali a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ se ne trova uno per prima cosa;
l'ortogonalità è data dall'annullarsi del prodotto scalare

$(a, b, c) \perp (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \Leftrightarrow (a, b, c) \circ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 0$ cioè

$$\frac{a}{3} + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c = 0$$

una soluzione è $(0, 1, -1)$ $(a=0,\ b=1,\ c=-1)$

Quindi per trovare un secondo vettore (α, β, γ) ortogonale sia a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e a $(0, 1, -1)$ piuttosto che risolvere il sistema per i prodotti scalari $\begin{cases} \frac{\alpha}{3} + \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \end{cases}$

(nel caso immediato $\beta = \gamma$ e quindi $\alpha = -4\gamma$; $\gamma(-4, 1, 1)$)

si può usare il prodotto vettore tra $(0, 1, -1)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
(e cambiando segno se lo si vuole considerare come secondo elemento della base)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, -1) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \\ -1 & 2/3 \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$
$$= -\frac{1}{3}(-4, 1, 1)$$

3) Così si determina l'orientamento, e con i calcoli fatti o si considera

$((0, 1, -1), (-4, 1, 1), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}))$ o $(4, -1, -1), (0, 1, -1), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}))$

1) Infine si moltiplicano i due vettori per il reciproco della propria lunghezza per avere una base unitaria;
con i calcoli fatti una base è quindi

$$\left((0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}); (-\tfrac{4}{\sqrt{2}\cdot 3}, \tfrac{1}{\sqrt{2}\cdot 3}, \tfrac{1}{\sqrt{2}\, 3}); (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})\right)$$

11 In 200 pagine vi sono 400 errori

Primo modo di risolvere:

si può pensare a 400 lanci di un "dado" non truccato con 200 facce distinte ed equiprobabili

quindi

la probabilità che un generico errore compaia in una data pagina (che scelta una faccia in un lancio compaia questa) è $\frac{1}{200}$

è una distribuzione binomiale $\left(\frac{1}{200}, 400\right)$

$$P(\text{k errori in una pagina data}) = \binom{400}{k}\cdot\left(\frac{1}{200}\right)^k\left(1-\frac{1}{200}\right)^{400-k}$$

che nel caso è utile scrivere $= \left(\frac{199}{200}\right)^{400}\binom{400}{k}\frac{1}{199^k}$

a) $p(2\text{ errori}) = \binom{400}{2}\left(\frac{1}{200}\right)^2\left(\frac{199}{200}\right)^{398} = \frac{400\cdot 399}{2}\,\frac{1}{200^2}\left(\frac{199}{200}\right)^{398} =$

$p(3\text{ errori}) = \binom{400}{3}\left(\frac{1}{200}\right)^3\left(\frac{199}{200}\right)^{397} = \frac{400\cdot 399\cdot 397}{6}\,\frac{1}{200^3}\left(\frac{199}{200}\right)^{397} =$

$P(2) = \left(\frac{199}{200}\right)^{400}\frac{400\cdot 399}{2}\,\frac{1}{199^2}$

$P(3) = \left(\frac{199}{200}\right)^{400}\frac{400\cdot 399\cdot 398}{6}\,\frac{1}{199^3}$

$\frac{P(2)}{P(3)} = \frac{3}{398}\cdot 199 = \frac{597}{398} > 1$ c) Analogamente $\frac{P(2)}{P(1)} = \frac{399}{398} > 1$

b) Scrivendo $P(k) = \left(\frac{199}{200}\right)^{400}\binom{400}{k}\frac{1}{199^k}$ per renderlo massimo al variare di k tra 0 e 400 si osserva che

1. $\binom{400}{k} = \binom{400}{400-k}$ quindi considerando il fattore $\frac{1}{199^k}$ il massimo viene preso per k tra 0 e 200

e.g. $P(207) = \left(\frac{199}{200}\right)^{400}\binom{400}{207}\frac{1}{199^{207}} < \left(\frac{199}{200}\right)^{400}\binom{400}{207}\frac{1}{199^7} = P(7)$

2. Quindi si scrive $\binom{400}{k}$ come prodotto di k fattori $\frac{400-h+1}{h}$ $1\leq h\leq k$ ed ad ognuno si distribuisce uno dei k $\frac{1}{199}$

$$\left(\frac{400}{1}\cdot\frac{1}{199}\right)\left(\frac{399}{2}\cdot\frac{1}{199}\right)\cdots\left(\frac{400-h+1}{h}\cdot\frac{1}{199}\right)\cdots\left(\left(\frac{400-k+1}{k}\right)\frac{1}{199}\right) = \binom{400}{k}\frac{1}{199^k}$$

3. si osserva che dal terzo fattore in poi sono tutti minori di 1

$\frac{400-h+1}{199h} \leq 1$; $400-h+1 \leq 199h$; $401 \leq 200h$; $\frac{401}{200} \leq h$

e $2 < \frac{401}{200} < 3$

Secondo metodo:

assunto lo schema di una legge binomiale $\left(\frac{1}{200}, 400\right)$

si usa l'approssimazione di Poisson

e considerando che la media sulla popolazione è data

$\frac{400}{200} = 2$ si ha $p(k \text{ errori}) \sim e^{-2}\frac{2^k}{k!}$

a) $P(2 \text{ errori}) \sim e^{-2}\frac{2^2}{2!} = e^{-2} \cdot 2 >$

$P(3 \text{ errori}) \sim e^{-2}\frac{2^3}{3!} = e^{-2}\frac{4}{3}$

b) $p(k) \approx e^{-2} \frac{2}{k} \cdot \frac{2}{k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} < e^{-2}\frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \approx P(2) \approx p(1)$

quindi è più probabile trovare 2 errori per pagina

c) Con tale approssimazione si ha $p(2) \sim p(1)$

e quindi per sincerarsi delle cose va usato il

primo metodo