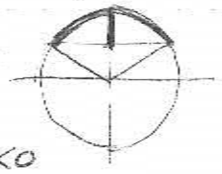
SOLUZIONI ALLA PROVA SCRITTA DEL VI APPELLO (21-9-09)

Matematica & Statistica E.B.I. AA 2008-09

1 Dominio $\log \frac{x+1}{x-1}$: $\begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x \neq 1 \\ x+1<0 \\ x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x < -1 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x > 1 \quad o \quad x < -1} \Leftrightarrow |x| > 1$

2 $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ x^2 + 7x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ -7 < x < 0 \end{cases}$



$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ -7 < x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \ k<0 \\ -7<x<0 \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 0; \ \frac{\pi}{6} - 2\pi < 0 \right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2\pi < x < \frac{5}{6}\pi - 2\pi \\ -7<x<0 \end{cases}$ $\left(-7 < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi: \ -7 > \frac{5}{6}\pi - 4\pi \ \ -7 < \frac{\pi}{6} - 2\pi < \frac{5}{6}\pi - 2\pi \right)$ $\Leftrightarrow -\frac{11}{6}\pi < x < -\frac{7}{6}\pi$

3 Se P è la popolazione iniziale quella finale è compresa tra $A = P(1 + \frac{40}{100})$ e $P(1 + \frac{60}{100}) = B$, VALUTANDOLA CON $\frac{A+B}{2}$ l'errore relativo è $\frac{B-A}{A+B} = \frac{\frac{60}{100} - \frac{40}{100}}{\frac{300}{100}} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$

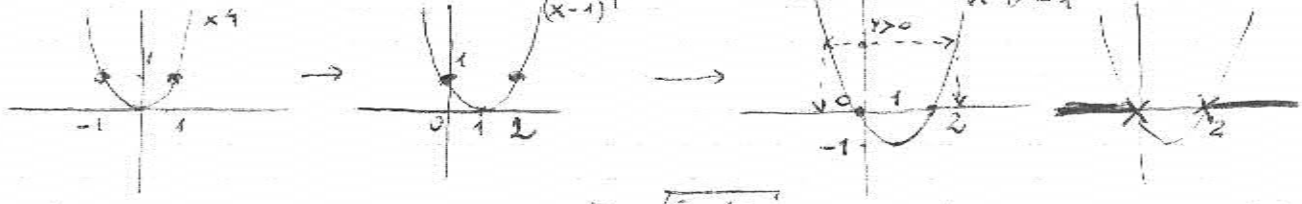
4 $\begin{cases} D_1 + D_2 + D_3 = 4 \\ 1 \leq D_1 \leq 6 \\ 1 \leq D_2 \leq 6 \\ 1 \leq D_3 \leq 6 \end{cases}$ ha come soluzioni $D_1 = 1, D_2 = 1, D_3 = 2$ o
$D_1 = 1, D_2 = 2, D_3 = 1$ o
$D_1 = 2, D_2 = 1, D_3 = 1$

poiché $P(D_j = i) = \frac{1}{6} \quad 1 \leq i \leq 6$ essendo i tre lanci indipendenti

$P(D_1 = 1 \text{ e } D_2 = 1 \text{ e } D_3 = 2) = P(D_1 = 1) P(D_2 = 1) P(D_3 = 2) = \frac{1}{6^3} =$
$= P(D_1 = 1 \text{ e } D_2 = 2 \text{ e } D_3 = 1) =$
$= P(D_1 = 2 \text{ e } D_2 = 1 \text{ e } D_3 = 1)$ Quindi essendo i tre casi esclusivi

$P(D_1 + D_2 + D_3 = 4) = P((D_1 = 1 \text{ e } D_2 = 1 \text{ e } D_3 = 2) \text{ o } (D_1 = 1 \text{ e } D_2 = 2 \text{ e } D_3 = 1) \text{ o } (D_1 = 2 \text{ e } D_2 = 1 \text{ e } D_3 = 1))$
$= P(D_1 = 1 \text{ e } D_2 = 1 \text{ e } D_3 = 2) + P(D_1 = 1 \text{ e } D_2 = 2 \text{ e } D_3 = 1) + P(D_1 = 2 \text{ e } D_2 = 1 \text{ e } D_3 = 1) =$
$= \frac{3}{6^3} = \frac{3}{36 \cdot 6} = \frac{1}{72}$

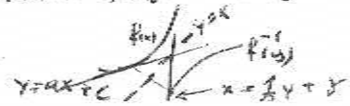
5



6. $z^2 + 3z + 3 = 0 \quad z \in \mathbb{C}: \ z \in \frac{-3 + \sqrt{9-12}}{2}, \ z \in -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}, \ z = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

7. Dalla teoria $g'(0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ se $f(x_0) = 0$: $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

quindi $g'(0) = 1$



8. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \underset{\substack{y=e^x>0\\ dy=e^x dx}}{=} \int \frac{dy}{1+y} = \lg(1+e^x)+c$

9. $\cos \widehat{VOW} = \dfrac{V \cdot W}{|V|\cdot|W|}$ $\quad V=(1,1,1) \quad |V| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} = |W|$

$W=(1,-1,1) \quad V\cdot W = 1\cdot 1 + 1(-1) + 1\cdot 1 = 1$

$\cos \widehat{VOW} = \dfrac{1}{3}$

10. Poiché $Y_n = 1-2X_n$ $1\le n\le 5$; $\sigma_Y^2 = 4\sigma_X^2$, $m_Y = 1-2m_X$ e $\sigma_{XY} = -2\sigma_X^2$ si ha

$m_x = 3$
$\sigma_x^2 = \frac{4+1+1+4}{5} = 2$
$\sigma_Y^2 = 8$
$\sigma_{xy} = -4$

11.a $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t)+3y(t) \end{cases}$ e $\quad x(0)=100$, $\; y(0)=10$

(derivo la prima equazione) $x'' = x' - y'$ = (sostituisco la seconda)

$x'' = x' - (x+3y) = x' - x - 3y$ (ricavo $-y$ dalla prima e sostituisco)

$x'' = x' - x + 3(x'-x) = 4x' - 4x$

quindi $x(t)$ deve soddisfare $x'' - 4x' + 4x = 0 \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_1=\lambda_2=2$

quindi $x(t) = ae^{2t} + bte^{2t}$, $\quad x' = 2ae^{2t} + 2bte^{2t} + be^{2t} = 2x + be^{2t}$.

Dalla prima

$y(t) = x(t) - x'(t) = -x - be^{2t} = -(a+b)e^{2t} - bte^{2t}$

$x(0) = 100 \qquad a = 100$

$y(0) = 10 \quad y(0) = -x(0) - b = -100 - b = 10 \qquad b = -110$

$x(t) = 100e^{2t} - 110te^{2t} \qquad y(t) = 10e^{2t} + 110te^{2t}$

11.b $\begin{cases} 0 \le 2y \le x \\ t \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 2y \\ 2y \ge 0 \\ t \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10 - 11t \ge 2 + 22t \\ 2 + 22t \ge 0 \\ t \ge 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} 8 \ge 33t \\ 22t \ge -2 \\ t \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8 \ge 33t \\ t \ge 0 \end{cases} \iff 0 \le t \le \dfrac{8}{33}$.

12.a

Senza ulteriori ipotesi si pensa che in una cattura il fatto che un individuo sia preso sia indipendente dal fatto che ne sia preso un altro.

La presa di un singolo individuo in una cattura è quindi uno schema di Bernoulli.

Detta C la variabile aleatoria che da il numero di individui trovati nella singola cattura si ha per quanto detto è distribuita con legge binomiale su 1000 tentativi e media 3:

$\mathbb{P}(C=k) = \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k} \qquad \langle C \rangle = \frac{3}{1000}\cdot 1000 = 3 \quad p = 1000\langle C\rangle$

$\mathbb{P}(C=k) = \binom{1000}{k}\left(\frac{3}{1000}\right)^k \left(\frac{997}{1000}\right)^{1000-k}$

Analogamente detta M la variabile aleatoria che dà il numero di individui marcati trovati nella singola cattura si ha che ha distribuzione binomiale su 30 tentativi e probabilità di singolo successo $\frac{3}{1000}$

$$P(M=k) = \binom{30}{k}\left(\frac{3}{1000}\right)^k\left(\frac{997}{1000}\right)^{30-k}$$

12.b

Si tratta di calcolare $P(M\geq 1/C=5) = 1-P(M=0/C=5)$

ora la cattura condizionata ha distribuzione ipergeometrica

$$P(M=k/C=h) = \frac{\binom{30}{k}\binom{970}{h-k}}{\binom{1000}{h}}$$ nel caso

$$P(M=0/C=5) = \frac{\binom{970}{5}}{\binom{1000}{5}} = \frac{970!}{965!}\frac{995!}{1000!} =$$

$$= \frac{970\cdot 969\cdot 968\cdot 967\cdot 966}{1000\cdot 999\cdot 998\cdot 997\cdot 996}$$ compreso nell'intervallo $\left[\left(\frac{966}{1000}\right)^5;\left(\frac{970}{996}\right)^5\right]\subseteq$

$\subseteq [0{,}841,\ 0{,}877]$

Quindi $P(M\geq 1/C=5) \sim 0{,}141 \pm 0{,}018$

(Si potrebbe considerare un'approssimazione dell'ipergeometrica con una Binomiale e quindi una Poisson, anche se manca la giustificazione del grado di accuratezza raggiunto

La media della Poisson in questione numero estrazioni $\cdot\frac{\text{numero successi}}{\text{numero totale}}$ =

$= 5\cdot\frac{30}{1000} = \frac{3}{20} = 0{,}15$

$$P(M=0/C=5) \sim e^{-0{,}15}\cdot\frac{(0{,}15)^0}{0!} = e^{-0{,}15} \sim (2{,}7)^{-0{,}15}$$

$\sim (0{,}37)^{0{,}15} \sim 0{,}862$

$P(M\geq 1/C=5) \sim 0{,}138$)

12.c

$$P(M=C) = \sum_{h=0}^{\infty} P(M=h \text{ e } C=h) = \sum_{h=0}^{30} P(M=h \text{ e } C=h) =$$

$$= \sum_{h=0}^{30} P(M=h/C=h)\,P(C=h) = \sum_{h=0}^{30}\frac{\binom{30}{h}}{\cancel{\binom{1000}{h}}}\cancel{\binom{1000}{h}}\left(\frac{3}{1000}\right)^h\left(\frac{997}{1000}\right)^{1000-h} =$$

$$= \sum_{h=0}^{30}\binom{30}{h}\left(\frac{3}{1000}\right)^h\left(\frac{997}{1000}\right)^{30-h}\cdot\left(\frac{997}{1000}\right)^{970} =$$

$$= \left(\frac{3}{1000}+\frac{997}{1000}\right)^{30}\cdot\left(\frac{997}{1000}\right)^{970} = \left(\frac{997}{1000}\right)^{970}.$$