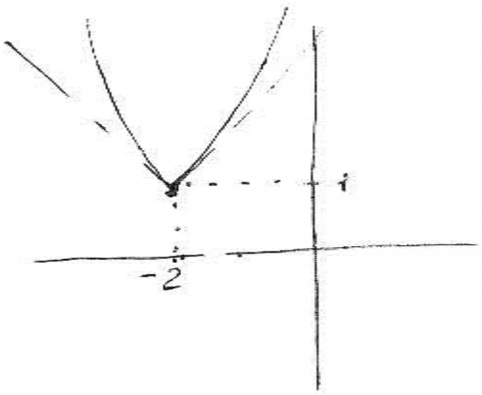
Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009,
Scienze Ecologiche e della Biodiversità

Jmmy A. Mauro, Vincenzo M. Tortorelli

III appello B: 20 Aprile 2009

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO ISCR.	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
- *compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo*
- *riportare con ordine* lo svolgimento della soluzione agli esercizi contrassegnati da •;
- scrivere, nello spazio apposito all'interno della tabella sottostante, *solo* la risposta agli altri;
- il tutto sul presente foglio, *l'unico* che deve essere consegnato.

1	$0 \leq x \leq 1$, $x \neq \log_3 2 < 1$	**2**	$\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$
3	$\frac{3}{7} \sim 0.43$	**4**	$\sim 41\%$ $\left[\frac{290}{700}\right]$
5	8	**6**	$\frac{3}{7}\sqrt{5} \sim 0.96$
7			
8	$\frac{x^2-2x}{e^x}$	**9**	$\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sim$
10	$a\cos\sqrt{2}x + b\sin\sqrt{2}x + \sin x$	**11**	MODA MEDIANA MEDIA VAR. $7,\ 5,\ \frac{13}{3}\ (4,3),\ \frac{52}{9}\ (5,78)$
12	$7/32 \sim 0.22$		

13 $\left(4, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$

14 $x-2$; $(-2,-4)$; $\frac{27}{4}$

15 $1-5e^{-4} \sim 0{,}9$; $1-24e^{-24}$

Matematica e Statistica per Scienze Ecologiche e della Biodiversità

A.A. 2008-2009 J.A. Mauro V.M. Tortorelli

III APPELLO 20 APRILE 2009 VERSIONE B SOLUZIONI 1-6

1. NUMERATORE: l'argomento del logaritmo dev'esser strettamente positivo
$3^x+2>0$ verificata per ogni $x\in\mathbb{R}$: $3^x+2>2>0$

DENOMINATORE: dev'esser non nullo: $\arcsin(3^x-2)\neq 0$ cioè $3^x-2\neq 0$

l'argomento di arsin dev'esser in $[-1,1]$: $-1\leq 3^x-2\leq 1$

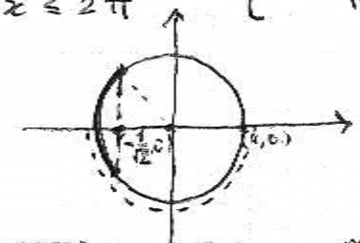
Le condizioni restrittive sono $\begin{cases}3^x-2\neq 0\\ -1\leq 3^x-2\leq 1\end{cases}$ cioè $\begin{cases}3^x\neq 2\\ 1\leq 3^x\leq 3\end{cases}$

cioè $\begin{cases}x\neq \log_3 2\\ 0\leq x\leq 1\end{cases}$. Quindi il dominio è $[0,\log_3 2)\cup(\log_3 2, 1]$

essendo $0<\log_3 2<1$.

2. $\begin{cases}1+\sqrt{2}\cos x\leq 0\\ \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}$ $\begin{cases}\cos x\leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3}{4}\pi+2k\pi\leq x\leq \frac{5}{4}\pi+2k\pi\\ \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}$

$\pi\leq x\leq \frac{5}{4}\pi$



$1\,l=10^3\,cm^3$ densità $=\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$ $den_{max}=\frac{mas_{max}}{vol_{min}}$ $den_{min}=\frac{mas_{min}}{vol_{max}}$

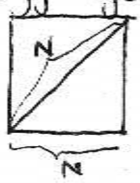
$e_{rel\,den}=\frac{den_{max}-den_{min}}{den_{max}+den_{min}}=\frac{4\cdot10^2\cdot5\cdot10-2\cdot10^2\cdot4\cdot10}{4\cdot10^2\cdot5\cdot10+2\cdot10^2\cdot4\cdot10}=\frac{4\cdot5-2\cdot4}{4\cdot5+2\cdot4}=\frac{3}{7}\simeq 0{,}43$

M = massa ultima soluzione menzionata con soluto $\frac{60}{100}M$
$\frac{M}{2}$ = " seconda " " " $\frac{10}{100}\frac{M}{2}$
$\frac{M}{4}$ = " prima " " " $\frac{30}{100}\frac{M}{4}$

MASSA TOTALE $=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})M=\frac{7}{4}M$ SOLUTO TOTALE $=(60+5+\frac{15}{2})\frac{M}{100}=\frac{145}{2}\frac{M}{100}$

CONCENTRAZIONE $\frac{290}{700}$ IN PERCENTUALE $\sim 41\%$

Se si hanno N alleli i possibili genotipi sono $\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N^2+N}{2}=G_N$
($\{A_i,A_j\}$ con $A_i\neq A_j$ se $i\neq j$, le coppie non ordinate con elementi distinti sono la metà delle coppie ordinate con elementi distinti $\frac{N^2-N}{2}$, e a queste si aggiungono i genotipi con un solo allele N
$\frac{N^2-N}{2}+N=\frac{N^2+N}{2}$



) Per $N=8$ $G_8=\frac{64+8}{2}=36$.

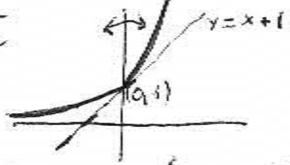
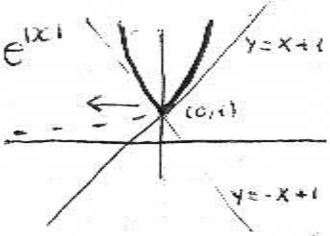
coseno $=\frac{\text{PRODOTTO scalare}}{\text{PRODOTTO DISTANZE DALL'ORIGINE}}=\frac{1\cdot3+(-2)\cdot(-2)+(-3)\cdot1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{3+4-3}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}}=\frac{2}{7}$

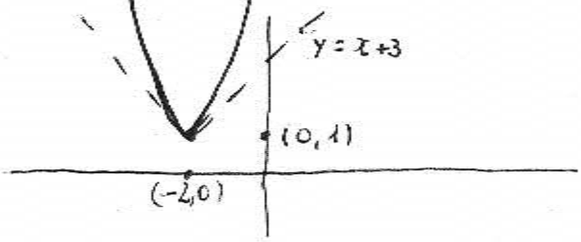
modulo seno $=\sqrt{1-(\text{coseno})^2}=\sqrt{1-\frac{4}{\ldots}}=\frac{3}{\ldots}\sqrt{5}\sim 0{,}96$

Mat. e Stat per Sc. Ec. e della Biod.

AA. 2008 - 2009 J.A. Mauro V.M. Tortorelli

III APPELLO 20 APRILE 2009 VERSIONE B SOLUZIONI 7 - 12

7. Il grafico $y = e^x$ è  il grafico $y = e^{|x|}$ 

il grafico $y = e^{|x+2|}$ 

8. $\left(\frac{x^2+2x+2}{e^x}\right)'' = (((x^2+2x+2)e^{-x})')' = ((2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+2)e^{-x})' =$

$= ((-x^2)e^{-x})' = -2xe^{-x} - (-x^2)e^{-x} = (x^2-2x)e^{-x} = \frac{x^2-2x}{e^x}$

9. PRIMITIVA DI $\frac{\sin x}{1-\cos(x+\pi)}$ in $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ $=$ PRIMITIVA $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ $=$ PRIMITIVA $\frac{(-\cos x)'}{1+\cos x} =$

$=$ − PRIMITIVA $\frac{(\cos x)'}{1+\cos x}$ $=$ − PRIMITIVA $[\log(1+\cos x)]' = -\log(1+\cos x) + c$

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos(x+\pi)}\,dx = -\log(1+\cos\tfrac{\pi}{2}) - (-\log(1+\cos(-\tfrac{\pi}{6}))) =$$

$$= \log(1+\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

10. Soluzioni equazione omogenea: $Z''(x) + 2Z(x) = 0$

equazione algebrica associata $\lambda^2 + 2 = 0$ $\lambda = \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$

$Z(x) = a\cos(\sqrt{2}x) + b\sin(\sqrt{2}x)$ al variare a, b in $\mathbb{R}$

Soluzione particolare: $y^*(x) = \sin x$

Soluzioni generali: $a\cos(\sqrt{2}x) + b\sin(\sqrt{2}x) + \sin x$; $a, b \in \mathbb{R}$

11. 7, 5, 0, 7, 2, 7, 4, 5, 2 ordinati in modo crescente $\underbrace{0,2,2,4}_{4},5,\underbrace{5,7,7,7}_{4}$

MODA 7

MEDIA $= \frac{7+5+0+7+2+7+4+5+2}{9} = \frac{13}{3}$

MEDIANA 5

VARIANZA $= \frac{(3\cdot 49 + 2\cdot 25 + 16 + 2\cdot 4)}{9} - \frac{13^2}{9} = \frac{52}{9}$

12. Probabilità che in un lancio non truccato si ottenga un dispari $= \frac{\text{n. casi favorevoli}}{\text{n. casi possibili}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Successo: esce un dispari, si considera la distribuzione binomiale su 8 sorti e 5 successi:

$\binom{8}{5}(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^{8-5} = \binom{8}{5}\frac{1}{2^8} = \cancel{8}\cdot 7\cdot\cancel{6}\ \frac{1}{256} = \frac{7}{32} \sim 0,22$

A.A. 2008-2009 J.A. Mauro V.M. Tortorelli

III APPELLO 20 APRILE 2009 VERSIONE B SOLUZIONI **13-15**

13 Essendo la rotazione attorno all'asse "delle x" le uniche coordinate che cambiano sono la seconda e la terza.
Esse cambiano diventando le coordinate nel piano (y,z) del ruotato attorno all'origine di $\pi/6$ in senso antiorario del punto $(2,1)$, cioè: (PRODOTTO RIGHE PER COLONNE)

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + (-\frac{1}{2})\cdot 1\\ \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{3}-1\\ 2+\sqrt{3}\end{pmatrix}\frac{1}{2}$$

Le coordinate richieste sono: $\left(4\,;\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\,;\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$

14 a) $f(x) = x^3 - 2x$, l'equazione retta tangente al grafico in $(1, f(1)) = (1, -1)$ è

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, quindi $y = x - 2$

b) $\begin{cases} y = x-2 \\ y = x^3 - 2x\end{cases}$, $x - 2 = x^3 - 2x$ $\quad x^3 - 3x + 2 = 0$ una soluzione è quella nota $x = 1$ l'altra si può nel caso trovare per tentativi ovvero risolvendo in α, β, γ $\; x^3 - 3x + 2 = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$

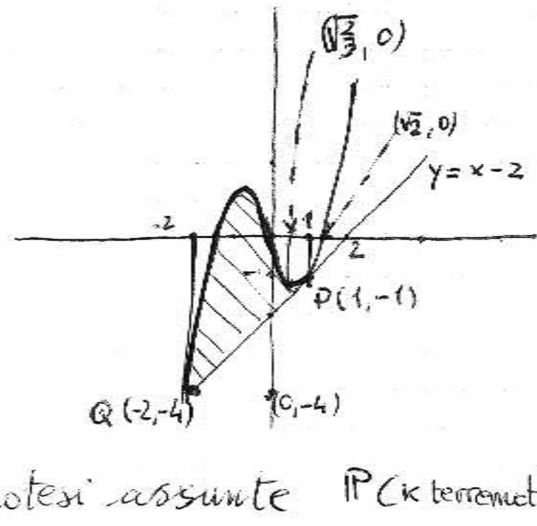
$x = -2 \quad ((-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0)$

Quindi $Q = (-2, f(-2)) = (-2, -4)$

c) Grafico: dominio $\mathbb{R}$; f è dispari $f(-x) = -f(x)$; $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$; $\min\limits_{x\geq 0} f(x) = f(\sqrt{\tfrac{2}{3}}) = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\tfrac{4}{3}$

$f''(x) = 6x \geq 0$ per $x \geq 0$ f è convessa, per tali x il grafico sta sopra le rette tangenti.
(in altro modo si osserva che $\min\limits_{x\geq 0} f = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{4}{3} > \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{4}{3}$)



$$\text{Area} = \int_{-2}^{1} (f(x) - (x-2))\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - \frac{2^4}{4} + \frac{3}{2}2^2 + 4 = \frac{27}{4}$$

15 Per le ipotesi assunte $\mathbb{P}(k \text{ terremoti in 1 anno}) = e^{-4}\frac{4^k}{k!}$

a) $\mathbb{P}$(almeno 2 terremoti in 1 anno) = 1 − $\mathbb{P}$(nessuno o 1 terremoto in 1 anno) =
= 1 − $\mathbb{P}$(0 terremoti in 1 anno) − $\mathbb{P}$(1 terr. in 1 anno) = $1 - e^{-4}(1+4) = 1 - 5e^{-4}$
$\sim 0{,}9$

b) $\mathbb{P}$(in 6 anni non si registri solo un terremoto) =
= 1 − $\mathbb{P}$(in 6 anni si registri esattamente un terremoto)
= 1 − $\mathbb{P}$(in 6 anni in un anno un solo terremoto nei rimanenti 5 nessun terremoto)

Si ragiona come per la distribuzione Binomiale con $\mathbb{P}$(1 terr. in 1 anno) = p <u>ma</u> q <u>non</u> $1-p$
$q = \mathbb{P}$(0 terr. in 1 anno). Quindi le prob. richiesta è

$$1 - \binom{6}{1} 4e^{-4}(e^{-4})^5 = 1 - 24e^{-24}$$