Soluzioni A

1. $\cos 2x = \frac{1}{2}\, 2\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x + c)$; $\sin 2\cdot 1 + c = 0$ sse $c = -1$.

2. $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\frac{d}{dx}x^2}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\left(\log(1+x^2) + c\right)$.

3. $\int_0^{\pi/2} \underset{F(x)}{e^x} \underset{G'(x)}{\cos 2x}\, dx = \underset{F(x)}{e^x} \underset{G(x)}{\tfrac{1}{2}\sin 2x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \underset{F'(x)}{e^x}\sin 2x\, dx = 0 - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{F(x)}{e^x} \overset{\bar G'(x)}{\sin 2x}\, dx$

$= -\frac{1}{2}\left\{ \overset{\bar F(x)}{e^x}\overset{\bar G(x)}{\left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right)}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^x \cos 2x\, dx\right\} = -\frac{e^{\pi/2}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x\, dx$

quindi

$\frac{5}{4}\int_0^{\pi/2} e^x \cos 2x\, dx = -\frac{1}{4} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{4}$ per cui $\int_0^{\pi/2} e^x \cos 2x\, dx = -\frac{1}{5} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{5}$

4. $(x+iy)\frac{x-iy}{x^2+y^2} = 1$; $\frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3}{10} + \frac{i}{10}$

5. $|3+\sqrt{3}i| = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$= 2\sqrt{3}\, e^{i\pi/6}$.

6. × Le funzioni $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 2$ sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y(2-y)$
× Nessuna altra soluzione ha grafico che interseca i grafici di queste due soluzioni che sono le rette orizzontali $y=0$ e $y=2$ (unicità).
Quindi la soluzione che soddisfa anche la condizione $y(0)=1$ ha grafico compreso tra queste due rette: $(0 < y(x) < 2)$.
× Ma in tale zona $y(2-y) > 0$, quindi $y'(x) > 0$ cioè y è crescente
× in particolare $y(x) \to \ell_1 \le 2$ $x \to +\infty$, $y(x) \to \ell_2 \ge 0$ $x \to -\infty$
quindi $y'(x) \to \ell_1(2-\ell_1)$ $x \to +\infty$ $y'(x) \to \ell_2(2-\ell_2)$ $x \to -\infty$
ma se $\ell_1(2-\ell_1) \ne 0$ o $\ell_2(2-\ell_2) \ne 0$ y supererebbe i limiti invalicabili
Quindi $\ell_1 = 2$ e $\ell_2 = 0$

7. × Polinomio associato all'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea
$y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$ è $W^2 - W + 1 = 0$ le cui radici sono
$W_{1,2} = \frac{1+\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Lo spazio delle soluzioni è quindi

$a\, e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + b\, e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $a, b \in \mathbb{R}$.

× Si impongono le condizioni iniziali alla generica soluzione
$y(t) = a e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + b e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ $y'(t) = \frac{a}{2}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{a\sqrt{3}}{2}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{b}{2}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{b\sqrt{3}}{2}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$1 = y(0) = a$
$1 = y'(0) = \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}$ quindi $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8. Si riordinano i dati 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 5 | 7 | 7 | 7 , sono dieci dati
mediana = $\frac{\text{quinto} + \text{sesto}}{2} = 2{,}5$ moda = valore di maggior frequenza = 2
media = $\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{2}{10} + 3\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{7}{10} = \frac{38}{10}$. Quadrati 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 9 | 25 | 49 | 49 | 49
Varianza = media quadrati − media al quadrato = ... = $\frac{536}{100}$

9. ved. risultato 10. PRODOTTO SCALARE = SOMMA PRODOTTI COORDINATE DI STESSO POSTO = PRODOTTO LUNG. PER COS. 11. ved. ris.

12.A • Il numero di elementi del campione è $2+39+1233+641+1 = 1916$

•• Ordinando i dati del campione in ordine crescente per ipotesi si ha:

$$\underbrace{x_1 \le x_2}_{\text{I cl}} < \underbrace{x_3 \le \dots \le x_{41}}_{\text{II cl}} < \underbrace{x_{42} \le \dots \le x_{1274}}_{\text{III cl}} < \underbrace{x_{1275} \le \dots \le x_{1915}}_{\text{IV cl}} < \underbrace{x_{1916}}_{\text{V cl}}$$

I cl	II cl	III cl	IV cl	V cl
$M_1 = 59$	$M_2 = 75$	$M_3 = 123$	$M_4 = 131$	$M_5 = 171$
2	39	1233	641	1

••• LA MEDIA $M = \frac{1}{1916}\sum_{i=1}^{1916} x_i = \frac{1}{1916}(x_1+x_2) + \frac{1}{1916}(x_3+\dots+x_{41}) + \frac{1}{1916}(x_{42}+\dots x_{1274}) +$

$+\frac{1}{1916}(x_{1275}+\dots+x_{1915}) + \frac{x_{1916}}{1916} = \frac{2}{1916}\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{39}{1916}\frac{x_3+\dots x_{41}}{1916} + \frac{1233}{1916}\frac{x_{42}+\dots x_{1274}}{1233} + \frac{641}{1916}\cdot\frac{x_{1275}+\dots+x_{1915}}{641} +$

$+\frac{1}{1916}\cdot\frac{x_{1916}}{1} = \frac{2}{1916}\cdot 59 + \frac{39}{1916}75 + \frac{1233}{1916}123 + \frac{641}{1916}\cdot 131 + \frac{1}{1916}\cdot 171 = \dots =$

$= \frac{238844}{1916} = 124{,}65762 \sim 124{,}66 \qquad 124 < M < 125$

•••• LE ALTRE QUANTITÀ SONO INDETERMINATE

• IL VALORE DELLA MEDIANA $\frac{x_{958}+x_{959}}{2}$ È TRA GLI ESTREMI DELLA TERZA CLASSE COMPRESI TRA 75 E 131

(Si trova z per cui $\begin{cases} 0 < z < 959-42 = 917 \\ (131-\delta)(316+z)+(75+\varepsilon)(917-z) = 123\cdot 1233 = 151659 \end{cases}$ ponendo

$x_{1274} = \dots = x_{959-z} = 131-\delta$ e $x_{959-z-1} = \dots = x_{42} = 75+\varepsilon$ si ottiene a parità di medie di classe una mediana arbitrariamente vicina a 131.
Considerando poi il caso limite $x_{1274} = \dots = x_{960} = 131$, $x_{959} = \dots = x_{42} = 75+R$ $(R>0)$
dovrà essere $75+R<131$, e per preservare la media di classe
$131\cdot 315 + (75+R)\cdot 918 = 151695$, $R = \frac{151695-131\cdot 315-75\cdot 918}{918} = \frac{41544}{918} \le 46 < 56$
che rispetta la condizione richiesta.
La mediana dovrà esser maggiore di $75 + \frac{41544}{918}$)

• Valori massimo $x_{1916} = 171$, minimo $x_1 = x_1+x_2-x_2 = 2\cdot 59 - x_2 = 118 - x_2 > 118-75 = 43$
$x_1 > 43$

• Per la varianza $VAR = \frac{1}{1916}\sum x_i^2 - M^2 = \frac{2}{1916}\frac{x_1^2+x_2^2}{2} + \frac{39}{1916}\cdot\frac{1}{39}\sum_{i=3}^{41} x_i^2 + \dots + \frac{1}{1916}171^2 - M^2 \ge$

$\ge \frac{2}{1916}M_1^2 + \frac{39}{1916}M_2^2 + \frac{1233}{1916}M_3^2 + \frac{641}{1916}M_4^2 + \frac{1}{1916}171^2 - M^2$

Inoltre $VAR \le MAX\{(M-x_1)^2, (x_{1916}-M)^2\}$, essendo
$x_{1916} = 171$, $x_1 > 43$, $124 < M < 125$ si ha $M - x_1 < 82$ e $x_{1916} - M < 47$ per cui
$VAR \le 82^2$

• La moda risulta piuttosto indeterminata: basta modificare una distribuzione iniettiva in modo che un solo valore abbia frequenza doppia.

13 A • IL POLINOMIO ASSOCIATO ALL'EQUAZIONE OMOGENEA $y''(x)-\lambda y(x)=0$
È $w^2-\lambda=0$ CON RADICI $w^2=\lambda$

$\lambda=0$ LE SOLUZIONI SONO $a+bx$, $a,b\in\mathbb{R}$
$\lambda>0$ " " $ae^{\sqrt{\lambda}x}+be^{-\sqrt{\lambda}x}$ "
$\lambda<0$ " " $a\cos\sqrt{|\lambda|}x+b\sin\sqrt{|\lambda|}x$ "

•• SI IMPONGONO LE CONDIZIONI $y(0)=y(\pi)=0$. I VARI CASI:

- $\lambda=0$ $a+b\cdot 0=0=a+b\cdot\pi$ dalla prima $a=0$
dalla seconda $b=0$

VI È SOLO LA SOLUZIONE NULLA

- $\lambda>0$ $a+b=0$ $a=-b$
$ae^{\sqrt{\lambda}\pi}+be^{-\sqrt{\lambda}\pi}=0$ $a(e^{\sqrt{\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{\lambda}\pi})=0$
quindi o $e^{\sqrt{\lambda}\pi}=e^{-\sqrt{\lambda}\pi}$ IL CHE COMPORTA $\sqrt{\lambda}=0$
o $a=0$. VI È SOLO LA SOLUZIONE NULLA

- $\lambda<0$ $a=0$
$a\cos\sqrt{|\lambda|}\pi+b\sin\sqrt{|\lambda|}\pi=0$ $b\sin\sqrt{|\lambda|}\pi=0$
per non avere la soluzione nulla $b\neq 0$; deve essere quindi
$\sin\sqrt{|\lambda|}\pi=0$ cioè $\sqrt{|\lambda|}\pi=k\pi$, $k\in\mathbb{N}$ cioè
$\sqrt{|\lambda|}=k$ cioè (essendo $\lambda<0$) $\lambda=-k^2$, $k\in\mathbb{N}$