Quarto appello, 10 luglio 2003 – Testi

I Parte.

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{2-|x+1|}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) := \log(x^x)$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.
4. Trovare una primitiva di $\dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x\,\sin x}$, $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log\log x}$, $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x+\sin x}$.
6. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 9 incluso di $f(x) = \sin(x^3+x^9)$.
7. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $xy' + y = e^x$.
8. Disegnare il grafico di $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

II Parte.

1. Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la parte principale di $e^{-1/x} - \cos(a/\sqrt{x})$ per $x \to +\infty$.
2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right]$.
3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \sin x\ , \\ y(0) = y'(0) = 0\ . \end{cases}$

I Parte.

1. Deve essere $2 - |x+1| \geq 0$, ovvero $-3 \leq x \leq 1$.
2. Siccome $D(\log(x^x)) = D(x \log x) = \log x + 1$.
3. Per parti: $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = \Big| -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \Big| -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$
4. $\log|\sin x - 1|$.
5. rispettivamente 1, $+\infty$, 0.
6. *dps* $\sin(x^3+x^9) = (x^3+x^9) - \frac{1}{6}(x^3+x^9)^3 + o\big((x^3+x^9)^4\big) = x^3 + \frac{5}{6}x^9 + o(x^{12})$.
7. L'equazione si riscrive come $(xy)' = e^x$, ovvero $xy = e^x + a$, ovvero $y = \dfrac{e^x+a}{x}$ con $a \in \mathbb{R}$.

II Parte.

1. Usando gli sviluppi di Taylor in 0 di e^t e $\cos t$ all'ordine 2 e 4 rispettivamente otteniamo

$$e^{-1/x} - \cos\Big(\frac{a}{\sqrt{x}}\Big) = \Big[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] - \Big[1 - \frac{a^2}{2x} + \frac{a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$
$$= \frac{a^2-2}{2x} + \frac{12-a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \sim \begin{cases} \dfrac{a^2-2}{2x} & \text{per } a \neq \pm\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{3x^2} & \text{per } a = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Usando lo sviluppo di Taylor di $\sin x$ all'ordine 1 in 0 otteniamo

$$\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x(1+x)}{x(1+x)\sin x} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{x(1+x)\sin x}$$

e per il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\Big] = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{x \cdot 1 \cdot x} = -1 \,.$$

3. Il polinomio catrattaristico associato all'equazione omogenea è $\lambda^2+2\lambda+2$, con zeri $\lambda = -1 \pm i$. La soluzione generale dell'omogenea è dunque

$$y = e^{-x}(a\cos x + b \sin x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Per risolvere l'equazione non omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y} = c\sin x + d\cos x$. Sostituendo nell'equazione si ottiene che c e d devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1/5 \\ d = -2/5 \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare è $\bar{y} = \frac{1}{5}(\sin x - 2\cos x)$, e la soluzione generale

$$y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x) + \frac{\sin x - 2\cos x}{5} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

A questo punto si vede facilmente che le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ sono soddisfatte prendendo $a = 2/5$ e $b = -3/5$.