Elementi di Analisi Matematica II, Anno Accademico 2002-2003, Matematica

G. Albert, A. Briani, V.M. Tortorelli

IV foglio di esercizi: V.M. Tortorelli

dal 3 aprile 2003 al 10 aprile 2003

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html $\longrightarrow$ El. di An. Mat. I e II A.A. 2002/03

ESERCIZIO n. 1

a - Si mostri che vi sono funzioni, da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, che trasformano ogni intervallo in un intervallo ma non sono continue.

b * - Si mostri che vi sono funzioni, da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, che trasformano ogni intervallo in un intervallo e non sono continue in alcun punto.

ESERCIZIO n. 2

a - Si provi che una funzione monotona definita su un intervallo ha solo discontinuità di tipo salto.

b - Si provi che una funzione monotona definita su un intervallo ha al più un insiem numerabile di punti in cui non è continua.

ESERCIZIO n. 3 Si provi che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ limitata è continua se e solo se $x_n \to x \in \mathbf{R}$ e $f(x_n) \to y \in \mathbf{R}$ allora $y = f(x)$. Si mostri che ciò non è vero se f non è limitata.

ESERCIZIO n. 4* Si provi che f da $\mathbf{R}$ in se è continua e non decrescente se e solo se per ogni successione limitata x_n si ha $\mathrm{maxlim}_{n\to\infty} f(x_n) = f(\mathrm{maxlim}_{n\to\infty} x_n)$ $[\mathrm{maxlim}_{n\to\infty} y_n = \inf_n \sup_{k\geq n} y_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} y_k]$.

DEFINIZIONE f si dice *uniformemente continua* su I se e solo se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x,\ y \in I\ (|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

ovvero

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{x,y\in I \\ |x-y|\leq\delta}} |f(x) - f(y)| = 0.$$

TEOREMA:

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è ivi uniformemente continua.

ESERCIZIO n. 5

a - Si provi che $x \mapsto \sqrt{x}$ è $\frac{1}{2}$-hölderiana su $[0; +\infty[$ ma non lipschitziana.

b - Si provi che $x \mapsto x^2$ e $x \mapsto sin(x^2)$ non sono uniformemente continue su $\mathbf{R}$ e sono lipscitziane sugli intervalli limitati.

c - Si provi che $x \mapsto \frac{1}{(\log|x|)^2}$, $x \neq 0$, è uniformemente continua ma non è hölderiana.

d - Si provi che le funzioni hölderiane e lipschitziane sono uniformemente continue.

ESERCIZIO n. 6

a - $f : I \to \mathbf{R}$ è continua se e solo se per ogni successione $x_n \to x \in I$ di elementi di I si ha $f(x_n) \to f(x)$.

b - $f : I \to \mathbf{R}$ se e solo se date due successioni di elementi di I per cui $x_n - y_n \to 0$ si ha anche $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

ESERCIZIO n. 7 Una funzione continua da $\mathbf{R}$ in se con limiti all'infinito è uniformemente continua.

ESERCIZIO n. 8 Al variare di $a,\ b \in \mathbf{R}$ si studi l'hölerianità di $x^a \sin(x^b)$ su $[1; +\infty[$.

ESERCIZIO n. 9 Una funzione f uniformemente continua da $\mathbf{R}$ in se è a crescita lineare $(f(x) \leq A + B|x|)$.
