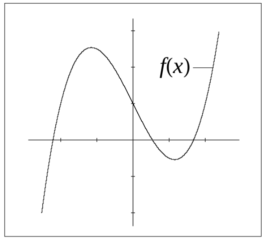
SECONDO APPELLO, 7 FEBBRAIO 2003 – TESTI

I PARTE.

1. Trovare una primitiva di $e^{|x|}$.
2. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \log\left(1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.
3. Determinate la parte principale di $\dfrac{\sin(x^8)}{\log(1 + x^4)}$ per $x \to 0$.
4. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax) - x}{x^2}$ esiste ed è finito, e calcolarlo.
5. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 2^x$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx$.
7. Risolvere $y'' + 4y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
8. Sia $f(x)$ la funzione in figura. Disegnare il grafico di $f(|x|)$ e di $|f(x)|$.

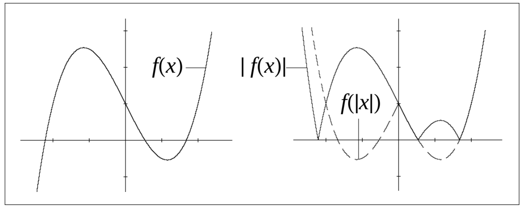


II PARTE.

1. a) Dato $\lambda \in (0, 1)$, calcolare il valore minimo di $f(x) := x^{1-\lambda} + x^{-\lambda}$ per $x \in (0, +\infty)$.
   b) Trovare la più grande costante C per cui vale la seguente diseguaglianza:
   $$a + b \geq C a^{\lambda} b^{1-\lambda} \quad \text{per ogni } a, b \text{ reali positivi.}$$
   c) Come nel punto b), ma con a, b interi positivi.
   d) Come nel punto b), ma con a, b potenze (intere positive) di 2 e $\lambda = 3/4$.
2. Si consideri, per $x > 0$, l'equazione lineare del secondo ordine
   $$y'' + \frac{y'}{x} - a\frac{y}{x^2} = c(x) \qquad (*)$$
   a) Risolvere (*) per $a = 1$ e $c(x) = 0$ (suggerimento: cercare soluzioni della forma $y = x^{\lambda}$).
   b) Risolvere (*) per a reale e $c(x) = 0$.
   c) Risolvere (*) per $a > 0$ e $c(x) = x$.
3. Calcolare il numero $\log(12/10)$ con un errore inferiore a 10^{-3}.
4. Calcolare, al variare di $a \in [0, +\infty)$, l'area della regione limitata del piano compresa tra la curva di equazione $y = (-x^2 + 4x - 3)^{-1}$ e la retta di equazione $y = a$.

I Parte.

1. Una primitiva f è data da $f(x) := e^x - 1$ per $x \geq 0$ e $f(x) := -e^{-x} + 1$ per $x < 0$. Infatti f deve essere della forma $e^x + a$ per $x \geq 0$ e della forma $-e^{-x} + b$ per $x \leq 0$, quindi a e b devono essere scelti in modo tale che le due funzioni coincidano in 0, vale a dire $a+1 = b-1$.
2. Deve essere $x^2 - 1 \geq 0$, ovvero $x \geq 1$ e $x \leq -1$.
3. $\dfrac{\sin(x^8)}{\log(1+x^4)} = \dfrac{x^8 + o(x^{23})}{x^4 + o(x^7)} \sim x^4$.
4. $\dfrac{\sin(ax) - x}{x^3} = \dfrac{(a-1)x + o(x^2)}{x^2}$. Il limite è finito solo per $a = 1$, e in tal caso vale 0.
5. Sono $+\infty$ e 0, rispettivamente.
6. $\displaystyle\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx = \int_0^8 t^{1/3}\, dt = \Big|\frac{3}{4} t^{4/3}\Big|_0^8 = 12.$
7. La soluzione generale dell'equazione è $y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Le condizioni iniziali danno $y = \cos(2x) - \sin(2x)$.
8.



II Parte.

1. a) La funzione f tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$, e studiandone la derivata si vede che è strettamente descrescente per $x \leq x_\lambda$, e strettamente crescente per $x \geq x_\lambda$, dove $x_\lambda := \lambda/(1-\lambda)$. Dunque il valore minimo viene assunto in x_λ, ed è

$$C_\lambda := f(x_\lambda) = \frac{1}{\lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda}}$$

b) Dividendo entrambe i termini per b e ponendo $a/b = x$, la disequazione $a + b \geq C a^\lambda b^{1-\lambda}$ può essere riscritta come $x + 1 \geq C x^\lambda$, ovvero $f(x) \geq C$. La miglior costante è dunque il minimo dei valori $f(x)$ per $x > 0$, e cioé C_λ.

c) Si procede come nel punto b): la costante migliore è allora il minimo dei valori $f(x)$ con x rapporto di interi positivi, ovvero con x razionale positivo. Siccome f è continua ed i razionali approssimano i reali, tale valore minimo è di nuovo C_λ (per essere precisi, dovremmo parlare in questo caso dell'estremo inferiore dei valori $f(x)$ con x razionale positivo, in quanto il punto x_λ in cui f raggiunge il valore C_λ potrebbe non essere razionale).

d) Si procede come nel punto b): la costante migliore è allora il minimo dei valori $f(x)$ con x rapporto di potenze intere positive di 2, ovvero con x della forma 2^n con n intero relativo. Per $\lambda = 3/4$, $x_\lambda = 3$, che non è una potenza di 2. Dunque il valore minimo viene raggiunto in 2 oppure in 4. Siccome $f(2) = 2^{1/4}/2$ è minore di $f(4) = 2^{1/2} \cdot 3/4$, la costante cercata è $f(2) = 2^{1/4}/2$.

2. b) Per $c = 0$, l'equazione $(*)$ é lineare omogenea del secondo ordine, e dunque l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2; basta dunque trovarne due linearmente indipendenti (cioè che non siano una multipla dell'altra). Prendendo y della forma x^λ, l'equazione diventa $(\lambda^2 - a)x^{\lambda-2} = 0$, ed è verificata se e solo se $\lambda^2 = a$. Dunque, per $a > 0$, due soluzioni di $(*)$ sono $x^{\pm\sqrt{a}}$, e la soluzione generale è

$$y = \alpha x^{\sqrt{a}} + \beta x^{-\sqrt{a}} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Per $a < 0$, le radici di a sono immaginarie: $\pm i\sqrt{-a}$. Quindi

$$x^{\pm i\sqrt{-a}} = e^{\pm i\sqrt{-a}\,\log x} = \cos(\sqrt{-a}\,\log x) \pm i \sin(\sqrt{-a}\,\log x)\ .$$

La soluzione generale di $(*)$ è

$$y = \alpha\cos(\sqrt{-a}\,\log x) + \beta\sin(\sqrt{-a}\,\log x) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Per $a = 0$, l'equazione diventa $y'' - y/x = 0$, e ponendo $y' = z$ otteniamo l'equazione a variabili separabili $z' = z/x$, che ha per soluzione $z = \alpha/x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Infine

$$y = \alpha \log x + \beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

c) Per risolvere l'equazione non omogenea, basta trovare una soluzione particolare. Prendendo y della forma $y = \gamma x^3$, l'equazione diventa $(9-a)\gamma x = x$ (la scelta dell'esponente 3 è obbligata dal fatto che il termine a sinistra dell'equazione deve essere un multiplo di x). Dunque, per $a \neq 9$, la soluzione generale è

$$y = \alpha x^{\sqrt{a}} + \beta x^{-\sqrt{a}} + \frac{1}{9-a} x^3 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Per $a = 9$, si puó ricorrere alla riduzione dell'ordine (omettiamo i conti).

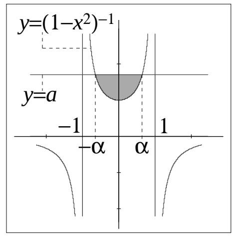
3. Usando lo sviluppo di Taylor di $\log(1+x)$ all'ordine 3 per $x := 2/10$ otteniamo

$$\log\Big(\frac{12}{10}\Big) = \frac{2}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{100} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{1000} + R_3\Big(\frac{2}{10}\Big)$$

e

$$\Big|R_3\Big(\frac{2}{10}\Big)\Big| = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^4}\cdot\frac{16}{10^4} \leq \frac{4}{10^4} < 10^{-3}\ .$$

4. Siccome $-x^2+4x-3 = -(x-2)^2+1$, ed il problema è chiaramente invariante per traslazioni orizzontali, possiamo sostituire la curva $y = (-x^2+4x-3)^{-1}$ con $y = (1-x^2)^{-1}$. Poiché $1-x^2$ è positiva nell'intervallo $(-1,1)$, nulla in ± 1 e negativa altrove, il grafico di $(1-x^2)^{-1}$ risulta essere come in figura. A questo punto, la regione che ci interessa è vuota per $a < 1$, mentre per $a \geq 1$ la sua area è data dal seguente integrale, dove si é posto $\alpha := \sqrt{1-1/a}$:



$$A = \int_{-\alpha}^{\alpha} a - \frac{1}{1-x^2}\, dx = 2\alpha a + \int_0^\alpha \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\, dx$$
$$= 2\alpha a + \log\Big(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big)\ .$$

Commenti.

- Esercizio 1, prima parte: moltissimi errori.
- Esercizio 2, seconda parte: una soluzione più elegante si ottiene con il cambio di variabile $t = \log x$. Ponendo infatti $z(t) = z(\log x) = y(x)$, l'equazione $(*)$ diventa $z'' - az = c(e^t)\, e^{2t}$, che è lineare a coefficienti costanti.