SECONDO COMPITINO, 19 DICEMBRE 2002 – TESTI

I PARTE, GRUPPO A.

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x-1)^2 + (y+1)^2 \le 1$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 10 in 0 di $f(x) := \sin(2x^2)$.
3. Calcolare $\lim_{x\to 0}(1+x)^{10}2^{-x}$ e $\lim_{x\to -\infty} x^2 2^x$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$.
5. Determinare una primitiva di xe^{3x}.
6. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \le x \le 2$ e $x \le y \le \sqrt{2x}$, e calcolarne l'area.
7. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} y' = (3x^2+1)(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = 0$.

I PARTE, GRUPPO B.

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x+1)^2 + (y-1)^2 \le 1$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 12 in 0 di $f(x) := e^{-x^3}$.
3. Calcolare $\lim_{x\to +\infty}(1+x)^{10}2^{-x}$ e $\lim_{x\to +\infty}(x+\sin x)^4 \log(x^3+1)$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2+1}\,dx$.
5. Determinare una primitiva di $x\cos(2x)$.
6. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \le x \le 1$ e $x \le y \le \sqrt{x}$, e calcolarne l'area.
7. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} y' = e^x(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

II PARTE, GRUPPO A.

1. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{|3e^{2x} - e^x|}{e^{2x} - e^x - 6}dx$.
2. Calcolare il volume dell'insieme A dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + z^4 \le 1$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/10} e^{-x^2}dx$ con un errore inferiore a 10^{-7}.
4. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione differenziale
$$y'' + (a^2-4)y' + (a+1)y = c(x)\ . \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di $(*)$ per $a = 3$ e $c(x) = 2e^x + \sin x$.
b) Per $a = 3$ e $c(x) = 2x^2$, determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.
c) Come al punto b), con $c(x)$ un generico polinomio di grado k.
d) Per $c(x) = 0$, determinare i valori di a per cui le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate.

II PARTE, GRUPPO B.

1. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{|-2e^{2x} + e^x|}{e^{2x} + e^x - 6}dx$.
2. Calcolare il volume dell'insieme A dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + z^6 \le 1$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/10} e^{-x^2}dx$ con un errore inferiore a 10^{-7}.
4. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione differenziale
$$y'' + (a^2-4)y' + (a+1)y = c(x)\ . \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di $(*)$ per $a = 3$ e $c(x) = 2e^{-x} + \sin x$.
b) Per $a = 3$ e $c(x) = x^2$, determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.
c) Come al punto b), con $c(x)$ un generico polinomio di grado k.
d) Per $c(x) = 0$, determinare i valori di a per cui le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate.

I PARTE, GRUPPO A.

1. Si tratta della circonferenza (piena!) di centro $(1,-1)$ e raggio 1.
2. Usando $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^6)$ si ottiene $\sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{4}{15}x^{10} + o(x^{12})$.
3. 1 e 0.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1 + \frac{2}{x^2+1}dx = \Big|x + 2\arctan x\Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{2}$.
5. Per parti: $\displaystyle\frac{3x-1}{9}e^{3x}$.
6. $\displaystyle A = \int_0^2 \sqrt{2x} - x\,dx = \Big|2\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$.
7. $\displaystyle\frac{y'}{y^2+1} = 3x^2+1$, $\arctan y = x^3 + x + c$; $y(0) = 0$ implica $c = 0$, e quindi $y = \tan(x^3+x)$.
8. $y = e^{-x}(\alpha + \beta x)$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

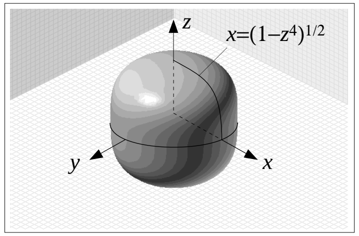
I PARTE, GRUPPO B.

1. Si tratta della circonferenza (piena!) di centro $(-1,1)$ e raggio 1.
2. Usando $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+o(t^4)$ si ottiene $e^{-x^3} = 1-x^3+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{6}x^9+\frac{1}{24}x^{12}+o(x^{12})$.
3. 0 e $+\infty$.
4. $\displaystyle\int_0^1 1 - \frac{4}{x^2+1}dx = \Big|x - 4\arctan x\Big|_0^1 = 1 - \pi$.
5. Per parti: $\displaystyle\frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$.
6. $\displaystyle A = \int_0^1 \sqrt{x} - x\,dx = \Big|2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$.
7. $\displaystyle\frac{y'}{y^2+1} = e^x$, $\arctan y = e^x + c$; $y(0) = 0$ implica $c = -1$, e quindi $y = \tan(e^x - 1)$.
8. $y = e^{-x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

II PARTE, GRUPPO A.

1. Tramite il cambio di variabile $e^x = t$ otteniamo
$$\int_{-\infty}^0 \frac{|3e^{2x}-e^x|}{e^{2x}-e^x-6}dx = \int_0^1 \frac{|3t-1|}{t^2-t-6}dt$$
$$= \int_0^{1/3} \frac{1-3t}{t^2-t-6}dt + \int_{1/3}^1 \frac{3t-1}{t^2-t-6}dt$$
e siccome $\displaystyle\frac{3t-1}{t^2-t-6} = \frac{8/5}{t-3} + \frac{7/5}{t+2}$ ha come primitiva $\displaystyle\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|$,
$$= -\Big|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\Big|_0^{1/3} + \Big|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\Big|_{1/3}^1$$
$$= 9\log 3 - \frac{33}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,136\ .$$

2. Conviene considerare le sezioni di A lungo l'asse z. Infatti, fissato $z \in \mathbb{R}$, A_z è l'insieme dei punti (x,y) tali che $x^2+y^2 \le 1 - z^4$, e dunque si tratta dell'insieme vuoto se $1 - z^4 < 0$, ovvero se $|z| > 1$, e del cerchio (pieno) di centro l'origine e raggio $\sqrt{1-z^4}$ se $|z| \le 1$. Questo permette di tracciare una raffigurazione sommaria di A (figura a lato); si noti tuttavia che per calcolare il volume questo non è necessario, ed infatti



$$\mathrm{vol}(A) = \int_{-1}^1 \mathrm{area}(A_z)\,dz = \int_{-1}^1 \pi(1-z^4)\,dz = \frac{8\pi}{5}\ .$$

3. Usiamo lo svilupo di Taylor con resto di Lagrange di e^t all'ordine 2:
$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{e^\xi}{6}t^3\ .$$
Per $t \le 0$ si ha $t \le \xi \le 0$, e quindi $0 \le e^\xi \le 1$ e
$$\Big|e^t - \Big(1 + t + \frac{t^2}{2}\Big)\Big| \le \Big|\frac{t^3}{6}\Big|\ .$$
Sostituendo $t = -x^2$, ed integrando per x compreso tra 0 e 1/10 otteniamo
$$\Big|\int_0^{1/10} e^{-x^2}dx - \int_0^{1/10} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}dx\Big| \le \int_0^{1/10}\frac{x^6}{6}\,dx$$
ovvero
$$\Big|\int_0^{1/10} e^{-x^2}dx - \Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{3\cdot 10^3} + \frac{1}{10^6}\Big)\Big| \le \frac{1}{42\cdot 10^7} < \frac{1}{10^8}\ .$$
Pertanto l'integrale vale $\displaystyle\frac{1}{10} - \frac{1}{3\cdot 10^3} + \frac{1}{10^6} \pm 10^{-8} = 0,0996676 \pm 10^{-8}$.

4. a) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea $y'' + 5y' + 4y = 0$ è $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda+4)(\lambda+1)$, e quindi la soluzione generale è
$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} \quad \text{con } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$
Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2e^x$ della forma $a\,e^x$, e si ottiene $a = 1/5$. Si cerca poi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = \sin x$ della forma $a\sin x + b\cos x$, e si ottiene $a = 3/34$ e $b = -5/34$. Dunque la soluzione generale dell'equazione (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2e^x + \sin x$ è
$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{e^x}{5} + \frac{3\sin x - 5\cos x}{34} \quad \text{con } \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$
b) Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2x^2$ della forma $ax^2 + bx + c$, e si ottiene l'identità $4ax^2 + (10a + 4b)x + (2a + 5b + c) = 2x^2$, che dà luogo al sistema
$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 4b = -10a \\ 4c = -2a - 5b \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -5/4 \\ c = 21/16 \end{cases}.$$

Quindi la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2x^2$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{4} + \frac{21}{16} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Siccome e^{-x} ed e^{-4x} convergono entrambi a zero per $x \to +\infty$, la parte principale di *tutte* le soluzioni è $x^2/2$.

c) Siccome le soluzioni dell'equazione omogenea tendono a zero come degli esponenziali per $x \to +\infty$, la parte principale di *tutte* le soluzioni è la stessa, e corrisponde a quella di una soluzione particolare. Dato $c(x) = \sum_0^k c_h x^h$ polinomio di grado k (per cui $c_k \neq 0$), cerchiamo una soluzione particolare tra i polinomi di grado k, ovvero della forma $\bar{y} = \sum_0^k a_h x^h$. L'equazione si riduce allora alla seguente identità di polinomi:

$$\sum_{h=0}^{k} \big[(h+2)(h+1)a_{h+2} + 5(h+1)a_{h+1} + 4a_h\big]x^h = \sum_{h=0}^{k} c_h x^h \ ,$$

dove si è posto $a_h = 0$ quando $h > k$. Otteniamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} 4a_k = c_k \\ 4a_{k-1} = c_{k-1} - 5ka_k \\ 4a_{k-2} = c_{k-2} - 5(k-1)a_{k-1} - k(k-1)a_k \\ \quad\vdots \\ 4a_h = c_h - 5(h+1)a_{h+1} - (h+2)(h+1)a_{h+2} \\ \quad\vdots \\ 4a_0 = c_0 - 5a_1 - 2a_2 \ . \end{cases}$$

Questo sistema è chiaramente risolubile, e quindi esiste una soluzione particolare della forma cercata. Inoltre, la prima equazione permette di determinare il termine di ordine più alto di $\bar{y}$, e cioé $\frac{c_k}{4}x^k$, che risulta essere la parte principale per $x \to +\infty$ di *tutte* le soluzioni.

d) Data l'equazione omogenea $y'' + Ay' + By = 0$, le soluzioni sono sempre combinazioni lineari di (I) $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$, (II) $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$, (III) $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.
Nel primo e nel secondo caso le soluzioni non sono mai tutte limitate. Nel terzo caso, le soluzioni sono limitate se e solo se $\alpha = 0$, cioé se il polinomio caratteristico ha soluzioni immaginarie pure, vale a dire è della forma $\lambda^2 + \beta^2$, cosa che si verifica per $A = 0$ e $B > 0$. Imponendo queste condizioni nell'equazione $(*)$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \\ a + 1 > 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} a^2 = \pm 2 \\ a + 1 > 0 \end{cases} , \quad a = 2 \ .$$

II Parte, gruppo B.

1. Come per il gruppo A: tramite il cambio di variabile $e^x = t$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|-2e^{2x} + e^x|}{e^{2x} + e^x - 6} dx = \int_0^1 \frac{|-2t+1|}{t^2+t-6} dt$$
$$= \int_0^{1/2} \frac{1-2t}{t^2+t-6} dt + \int_{1/2}^{1} \frac{2t-1}{t^2+t-6} dt$$

e siccome $\dfrac{2t-1}{t^2+t-6} = \dfrac{7/5}{t+3} + \dfrac{3/5}{t-2}$ ha come primitiva $\dfrac{7}{5}\log|t+3| + \dfrac{3}{5}\log|t-2|$,

$$= -\Big|\frac{7}{5}\log|t+3| + \frac{3}{5}\log|t-2|\Big|_0^{1/2} + \Big|\frac{7}{5}\log|t+3| + \frac{3}{5}\log|t-2|\Big|_{1/2}^{1}$$
$$= \frac{1}{5}\log 3 + \frac{37}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,099 \ .$$

2. Si procede come per il gruppo A:

$$\operatorname{vol}(A) = \int_{-1}^{1} \operatorname{area}(A_z)\, dz = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^6)\, dz = \frac{12\pi}{7} \ .$$

3. Uguale al gruppo A.

4. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea $y'' + 5y' + 4y = 0$ è $y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2e^{-x}$ della forma $a\,xe^x$ (perché e^{-x} già risolve l'equazione omogenea), e si ottiene $a = 2/3$. Poi si procede come per il gruppo A, e si ottiene che la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2e^{-x} + \sin x$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{2x\, e^x}{3} + \frac{3\sin x - 5\cos x}{34} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = x^2$ della forma $ax^2 + bx + c$, e alla fine si ottiene che la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = x^2$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{8} + \frac{21}{32} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

la cui parte principale è $x^2/4$.
c) e d) sono uguali al gruppo A.

Commenti.

1. I parte: molti errori nell'esercizio 1 (!!)
2. Esercizio 1, II parte: alcuni non si sono accorti che per liberarsi del modulo che appare al numeratore dell'integranda basta spezzare l'intervallo di integrazione in due (oppure hanno ignorato il problema, decidendo che il segno è costante nell'intervallo di integrazione).
3. Esercizio 3, II parte: il punto dell'esercizio è, sostanzialmente, trovare l'espansione di Taylor di e^{-x^2} di grado *più basso* il cui integrale differisce da quello di e^{-x^2} per meno di 10^{-7}, giustificando rigorosamente la risposta. In effetti basta usare i primi tre termini dello sviluppo, vale a dire, $1 - x^2 + x^4/2$. Prendere invece i primi quattro o cinque termini e dichiarare che "ovviamente" l'errore è nei limiti richiesti, vuol dire mancare il punto dell'esercizio (pur essendo la risposta corretta).
4. Esercizio 4a), II parte: alcuni si sono limitati ad esibire una soluzione particolare. Per quanto questo sia formalmente corretto, il punto dell'esercizio sarebbe invece di spiegare COME si è arrivati a tale soluzione . . .
5. Esercizio 4b), II parte: alcuni hanno calcolato la parte principale della soluzione per $x \to 0$ invece che per $x \to +\infty$. Altri non si sono accorti che la parte principale di tutte le soluzioni è la stessa, e che quindi non c'è bisogno di calcolare la soluzione che soddisfa i dati iniziali

indicati. Altri ancora hanno calcolato detta soluzione e poi hanno omesso di indicarne la parte principale.

6. Esercizio 4b), II parte: è opinione diffusa che $9 + 25 = 36 \dots$

7. Esercizio 4c), II parte: se si parte dall'assunto che *di sicuro* c'è una soluzione particolare tra i polinomi di grado k, è allora facile vedere che il termine di grado massimo deve essere uguale a quello di $c(x)$ diviso per 4. Dimostrare quest'assunto è più difficile.