PRIMO COMPITINO, 28 NOVEMBRE 2002 – TESTI

I PARTE, GRUPPO A.

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\log(x+1)+1}$.
2. Risolvere la disequazione $\cos(4x) \leq 1/2$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$.
3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x^4 e^x \sin(x^2) = o(x^a)$ per $x \to 0$?
4. Disegnare il grafico di $f(x) := 2 + \dfrac{1}{x-1}$.
5. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 2bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = 1/6$.
6. Calcolare la derivata prima e seconda di $f(x) := \dfrac{e^{\log(x^2-1)}}{x+1}$.
7. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 2^{-x}$.
8. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(1 + x^5 \log x)}{e^{1/x}}$.

I PARTE, GRUPPO B.

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\log(x+2)+2}$.
2. Risolvere la disequazione $\cos(3x) \leq 1/2$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$.
3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x^4 e^x \cos(x^2) = o(x^a)$ per $x \to 0$?
4. Disegnare il grafico di $f(x) := 2 + \dfrac{1}{x+1}$.
5. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 4bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = 1/6$.
6. Calcolare la derivata prima e seconda di $f(x) := \dfrac{e^{\log(x^2-4)}}{x-2}$.
7. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} x^5 \log x$.
8. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\pi/3 + x^5 \log x)}{e^{1/x}}$.

II PARTE.

1. Studiare la funzione $f(x) := \dfrac{x^2 - 2x}{x+1}$.
2. Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\cos x - be^x + \sin x}{x^2}$.
3. a) Determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) := (\sin x)^2 - \sin(x^2)$.
   b) Lo stesso, con $f(x) := (\sin x)^n - \sin(x^n)$, $n \geq 2$ intero.
4. a) Dimostrare che la funzione $f(x) := x \log x$ è invertibile per $x \geq 1$.
   b) Calcolare il limite del rapporto $f^{-1}(y)/y$ per $y \to +\infty$, dove f^{-1} è l'inversa di f.
   c) Trovare una funzione elementare $h(y)$ per cui $f^{-1}(y) = h(y) + o(h(y))$ per $y \to +\infty$.
   d) Trovare una funzione elementare $h(y)$ per cui $f^{-1}(y) = h(y) + o(y/\log^2 y)$ per $y \to +\infty$.

I PARTE, GRUPPO A.

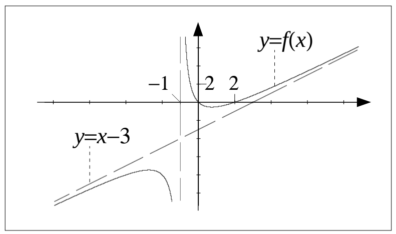
1. Deve essere $\log(x+1)+1 \geq 0$, ovvero $x \geq 1/e - 1$.
2. $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right]$.
3. Essendo $e^x \sim 1$ e $\sin x \sim x$, si ha $x^4 e^x \sin(x^2) \sim x^6$ che è $o(x^a)$ se e solo se $a < 6$.
4. Si tratta del ben noto grafico della funzione $1/x$ traslato a destra di 1 ed in alto di 2.
5. Siccome $f''(x) = 6ax + 4b$, deve essere $f'(1/6) = a + 4b = 0$, ovvero $a = -4b$ (e $a \neq 0$).
6. All'interno del campo di esistenza, la funzione si semplifica a $f(x) = x - 1$, per cui $f(x) = 1$ e $f''(x) = 0$.
7. Per $x \to +\infty$, ogni potenza è "o piccolo" di ogni esponenziale con base maggiore di 1, quindi il limite è 0.
8. Siccome numeratore è limitato, ed il denominatore tende a $+\infty$, il limite è 0.

I PARTE, GRUPPO B.

1. Deve essere $\log(x+2)+2 \geq 0$, ovvero $x \geq 1/e^2 - 2$.
2. $x \in \left[\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}\right]$.
3. Essendo $e^x \sim 1$ e $\cos x \sim 1$, si ha $x^4 e^x \sin(x^2) \sim x^4$ che è $o(x^a)$ se e solo se $a < 4$.
4. Si tratta del ben noto grafico della funzione $1/x$ traslato a sinistra di 1 ed in alto di 2.
5. Siccome $f''(x) = 6ax + 8b$, deve essere $f'(1/6) = a + 8b = 0$, ovvero $a = -8b$ (e $a \neq 0$).
6. All'interno del campo di esistenza, la funzione si semplifica a $f(x) = x + 2$, per cui $f(x) = 1$ e $f''(x) = 0$.
7. Per $x \to 0^+$, il lograitmo è "o piccolo" di ogni potenza negativa, quindi il limite è 0.
8. Siccome numeratore è limitato, ed il denominatore tende a $+\infty$, il limite è 0.

II PARTE.

1. La funzione f è definita per $x \neq -1$, positiva in $(-1,0) \cup (2,+\infty)$, nulla in 0 e 2, e negativa altrove; $f(x) = x - 3 + o(1)$ per $x \to \pm\infty$ ed $f(x) = 3/(x+1) + o(1/(x+1))$ per $x \to -1$, e quindi $f(\pm\infty) = \pm\infty$, $f(1^{\pm}) = \pm\infty$.
Inoltre $f'(x) = (x^2 + 2x - 2)(x+1)^{-2}$ si annulla in $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; dallo studio del segno si ottiene che f è crescente negli intervalli $(-\infty, x_1]$ e $[x_2, +\infty)$, e decrescente negli intervalli $[x_1, -1)$ e $(-1, x_2]$; in particolare x_1 ed x_2 sono punti di massimo e minimo locale, rispettivamente. La derivata seconda è $f''(x) = 3(x+1)^{-3}$, e quindi f è concava nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e convessa in $(-1, +\infty)$.



2. Siccome il denominatore è x^2, ci basta determinare l'espansione di Taylor all'ordine 2 (per $x \to 0$) del denominatore. Usando gli sviluppi noti:
$$a\cos x - be^x + \sin x = (a-b) + (1-b)x - \frac{a+b}{2}x^2 + o(x^3) \ .$$
Si presentano quindi tre casi:
1) se $a - b \neq 0$ (ovvero $a \neq b$), allora il limite è $+\infty$ per $a > b$ e $-\infty$ per $a < b$;
2) se $a - b = 0$ e $1 - b \neq 0$ (ovvero $a = b \neq 1$) allora il limite non esiste (per essere precisi, è $+\infty$ da un lato e $-\infty$ dall'altro);
3) se $a - b = 0$ e $1 - b + = 0$ (ovvero $a = b = 1$) allora il limite è $\frac{a+b}{2} = 1$.

3. a) Usiamo lo sviluppo di $\sin x$. Lo sviluppo $\sin t = t + o(t^2)$ (con $t = x$ nel primo termine e $t = x^2$ nel secondo) dà $f(x) = o(x^3)$ e dunque non è sufficiente. Proviamo allora $\sin t = t - t^3/6 + o(t^4)$:
$$\begin{aligned}(\sin x)^2 - \sin(x^2) &= \big(x - x^3/6 + o(x^4)\big)^2 - \big(x^2 - x^6/6 + o(x^8)\big)\\ &= \big(x^2 - x^4/3 + o(x^5)\big) - \big(x^2 + o(x^5)\big)\\ &= -x^4/3 + o(x^5)\ .\end{aligned}$$
b) Si procede come per a):
$$\begin{aligned}(\sin x)^n - \sin(x^n) &= \big(x - x^3/6 + o(x^4)\big)^n - \big(x^n - x^{2n}/6 + o(x^{4n})\big)\\ &= \big(x^n - nx^{n+2}/6 + o(x^{n+2})\big) - \big(x^n + o(x^{2n-1})\big)\\ &= -nx^{n+2}/6 + o(x^{n+2})\ .\end{aligned}$$
Il punto delicato è sviluppare la potenza n-esima nella prima riga: un modo è raccogliere x e usare lo sviluppo $(1+t)^n = 1 + nt + o(t)$:
$$\begin{aligned}\big[x - x^3/6 + o(x^4)\big]^n &= x^n\,\big[1 + \underbrace{-x^2/6 + o(x^2)}_{t}\big]^n\\ &= x^n\,\big[1 + n(-x^2/6 + o(x^2)) + o(-x^2/6 + o(x^2))\big]\\ &= x^n\,\big[1 - nx^2/6 + o(x^2)\big]\ .\end{aligned}$$
Un conto più accurato mostra in effetti che il resto nello sviluppo di f è $o(x^{n+3})$.

4. a) f è ben definita per $x \geq 1$, $f(1) = 0$ e $f(+\infty) = +\infty$. Inoltre $f'(x) = 1 + \log x \geq 1$ per $x \geq 1$, quindi f è crescente nell'intervallo $[1, +\infty)$ ed è quindi invertibile. Siccome f mappa $[1, +\infty))$ su $[0, +\infty)$, f^{-1} mappa $[0, +\infty)$ su $[1, +\infty))$. Inoltre $f^{-1}(+\infty) = +\infty$.
b) Indichiamo ora con $x = x(y)$ l'inversa di f (come funzione di y). Siccome $x \log x = y$ e $x \to +\infty$ per $y \to +\infty$,
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{x(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log(x(y))} = \frac{1}{+\infty} = 0\ .$$
c) Più difficile. Siccome $x = y/\log x$, dobbiamo esplicitare $\log x$ in funzione di y (almeno approssimativamente). Ora, $y = x \log x$ implica
$$\log y = \log x + \log\log x = \log x + o(\log x) \tag{1}$$
(perché $\log\log x = o(\log x)$ per $x \to +\infty$ e quindi anche per $y \to +\infty$). In particolare $\log y \sim \log x$, quindi la precedente equazione diventa
$$\log x = \log y - o(\log y) = \log y\,(1 + o(1))\ . \tag{2}$$

Pertanto

$$x = \frac{y}{\log x} = \frac{y}{\log y}(1+o(1))^{-1} = \frac{y}{\log y}(1+o(1)) = \frac{y}{\log y} + o\Big(\frac{y}{\log y}\Big) .$$

d) Andando oltre, dalla (2) si ottiene $\log\log x = \log\log y + o(1)$, e sostituendo nella (1)

$$\log x = \log y + \log\log y + o(1)$$

e poi

$$\begin{aligned} x = \frac{y}{\log x} &= \frac{y}{\log y + \log\log y + o(1)} \\ &= \frac{y}{\log y}\Big[1 + \frac{\log\log y}{\log y} + o\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big]^{-1} \\ &= \frac{y}{\log y}\Big[1 - \frac{\log\log y}{\log y} + o\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big] = \frac{y}{\log y} - \frac{y\log\log y}{\log^2 y} + o\Big(\frac{y}{\log^2 y}\Big) . \end{aligned}$$

Commenti.

1. Esercizio 2, II parte: molte "distrazioni" nella discussione del limite. In alcuni casi, sono stati semplicemente enunciati i risultati.
2. Esercizio 3, II parte: la semplificazione degli errori è stata fatta spesso in modo approssimativo.
3. Esercizio 4b), II parte: molte pseudo-dimostrazioni che alla fine si possono riassumere in "si vede a occhio che le cose vanno proprio così".
4. Esercizio 4b), II parte: usando de L'Hôpital, alcuni hanno sbagliato ad applicare la formula per la derivata della funzione inversa.