Complementi di Analisi Matematica, Anno Accademico 2005-2006, Laurea Specialistica in Informatica

V.M. Tortorelli

DIFFERENZIABILITÀ 2

Si enunciano i principali teoremi di rango in dimensione finita e il teorema di invertibilità locale in spazi di Banach.

TANGENTE AD IMMAGINI

Come già osservato, data una funzione vettoriale di una variabile derivabile $x \mapsto f(x)$ ' se per un valore del parametro z si ha $f'(z) \neq 0$ allora *l'immagine* di un intervallo sufficientemente *piccolo* attorno a z ha tangente nel punto $f(z)$ data dall'immagine del cammino lineare $t \mapsto f(z) + tf'(z)$: poichè vi è differenziabilità $f(x) = f(z) + f'(z)(x-z) + \varepsilon$ con $|\varepsilon|/|x-z| \to 0$ per $x \to z$.

- Per le *immagini* di funzioni vettoriali f di più variabili differenziabili vale il seguente:

TEOREMA 5 (del rango) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{k+h}$ con derivate parziali continue. Se la matrice del differenziale df_p ha *rango massimo* (l'immagine dell'applicazione lineare $(t_1 \dots t_k) \mapsto df_p(t_1 \dots t_k)$ ha dimensione k) vi è una palla $B_r(p)$, centro p e raggio r , per cui:
1- l'immagine della palla $f(B_r(p))$ è grafico di una funzione differenziabile con derivate continue rispetto al k-piano per l'origine di $\mathbf{R}^m$ immagine del differenziale (*localmente grafico)*
2- il k-piano tangente in $f(p)$ a $f(B_r(p))$ è il traslato di questo

$f(p) + t_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \dots + t_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = f(p) + df_p(t_1 \dots t_k)$

cioè i vettori delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)$ sono base del k-piano tangente in $f(p)$. Per superficie in $\mathbf{R}^3$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ il tangente in $f(p)$ in coordinate cartesiane è dato dalla condizione di ortogonalità $((x,y,z) - f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = det\Big((x,y,z) - f(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big) = 0$

TANGENTE A LUOGHI DI ZERI

Dato l'insieme di livello $C = \{x : f(x) = f(p)\}$ di una funzione a valori reali differenziabile in un punto p si conisdera un cammino derivabile $\gamma : [-1,1] \to C$ tutto in C che all'istante $t = 0$ passi per p con velocità v non nulla $(\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = v)$.
Poichè tale cammino sta in C la funzione $t \mapsto f(\gamma(t))$ risulta essere costante. La sua derivata è nulla. per cui $\gamma_1'(0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + \gamma_k'(0)\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = 0$ cioè $\nabla f(p)$ è ortogonale a tutte le direzioni tangenti a curve che giacciono su $\{f(x) = f(p)\}$. Necessariamente se l'insieme di livello avesse un piano tangente in p dovrebbe essere l'ortogonale alla direzione individuata da $\nabla f(p)$.

Il seguente teorema asserisce che per una funzione differenziabile con derivate continue se $\frac{\partial f}{\partial v}(p) \neq 0$ allora l'insieme che passa per p ove f è costante, $\{x : f(x) = f(p)\}$, "vicino a p" è il *grafico rispetto all'iperpiano ortogonale alla direzione* v di una funzione con derivate continue. Si considera come direzione quella dell'ultima coordinata, e, dato $x = (x_1, \dots x_k) \in \mathbf{R}^k$, si pone $x' = (x_1, \dots x_{k-1})$, $x'' = x_k$, identificando x con (x', x'').

TEOREMA 6(Teorema del Dini delle funzioni implicite) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ con derivate continue. Se $\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \neq 0$ vi sono: $R > 0$, $r > 0$, $\varphi : B_R(p') \to [p_k - r, p_k + r] = B_r(p'')$ per cui:

1- $x_k = x'' = \varphi(x') \Leftrightarrow |x' - p'| \leq R$, $|x'' - p''| \leq r$ e $f(x) = f(x', x'') = f(p)$

2- φ è differenziabile con derivate continue e dalla regola della catena si ha

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i}(p') = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p') = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)}{\frac{\partial f}{\partial x_k}(p)}$$

COROLLARIO Nelle precedenti ipotesi l'insieme $\{x : f(x) - f(p) = 0\}$, luogo di zeri, ha piano tangente in p dato dal luogo di zeri del differenziale traslato in p:

$(x_1 - p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (x_k - p_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = (x - p) \cdot \nabla f(p) = df_p(x - p) = 0$

OSSERVAZIONE: i seguenti esempi mostrano che le precisazioni nell'enunciato sono necessarie. Con $k = 2$ e $f(x,y) = x^2 - y^2$, $p = (0,0)$ il livello zero della funzione è dato da due rette incidenti che non sono grafico rispetto ad alcuna direzione in nessun rettangolo contenente p . Con $f(x,y) = x - \sin y$ si vede che è necessario restringere il luogo di zeri anche nella direzione dei valori della funzione implicita perchè sia un grafico. Con $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $p = (0,1)$ si vede che è necessario restringersi nel dominio.
OSSERVAZIONE: se la derivata direzionale rispetto a v è nonnulla in p allora il livello della funzione per p in un "cilindro retto" con altezza parallela a v è un grafico

Più in generale vale il seguente teorema delle funzioni implicite che permette di identificare i tangenti agli insimei di soluzioni di sistemi di equazioni. Il precedente teorema rientra nel seguente enunciato con $m = 1$ e $h = (k-1)$.

Si introducono le seguenti notazioni:

Se $f : A \subseteq \mathbf{R}^{m+h} \to \mathbf{R}^m$ e $x_{j_1}, \ldots x_{j_m}$ sono m distinte variabili tra quelle di $x = (x_1 \ldots x_k)$ con $\frac{\partial f}{\partial(x_{j_1} \ldots x_{j_m})}(p)$ si indica $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_r}}(p)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le r \le m}}$, la matrice quadrata $m \times m$ estratta dalla matrice Jacobiana di f scegliendo solo le colonne delle derivate rispetto alle m variabili prescelte.

In termini più geometrici significa che si sta considerando la restrizione del differenziale di f in p al sottospazio generato da $e_{j_1} \ldots e_{j_m}$. Più in generale se W è un sottospazio di dimensione r generato da $v_1 \ldots v_r$ con $\frac{\partial f}{\partial W}(p)$ o $\frac{\partial f}{\partial(w_1 \ldots w_r)}(p)$ si indica la restrizione di df_p a W.

A livello di differenziali $\frac{\partial f}{\partial W}(p)$ è il differenziale in 0 della funzione di r variabili $s = (s_1, \ldots s_r) \mapsto f(p + s_1 v_1 + \ldots + s_r v_r) = g(s)$ che si identifica con il differenziale in p della restrizione di f a $p + W$.

Se $x \in \mathbf{R}^{m+h}$ si identifica con (x', x''), ove $x' \in \mathbf{R}^h$ sono le prime h coordinate di x e $x'' \in \mathbf{R}^m$ le ultime m coordinate di x.
TEOREMA 7 Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^{m+h} \to \mathbf{R}^m$ con derivate continue.
Se df_p ha rango massimo, ovvero la sua immagine ha dimensione m,
per esempio $det\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1+h}}(p) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}}(p)\right) \neq 0$ allora vi sono:

$R > 0$, $r > 0$, $\varphi : B_R(p') \to B_r(p'')$ per cui:

1- $x'' = \varphi(x')$ $(x_{h+j} = \varphi_j(x_1 \ldots x_h),\ 1 \le j \le m) \Leftrightarrow |x'' - p''| \le r$ e $f(x) = f(x', x'') = f(p)$

2- φ è differenziabile con derivate continue. Poichè $x' \mapsto f(x', \varphi(x'))$ è costante ha derivate nulle, dalla regola della catena si ha considerando le funzioni coordinate di f e φ come colonne

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_i} + \sum_{1 \le j \le m} \frac{\partial f_r}{\partial x_{h+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0 \text{ cioè } \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial(x_{h+1} \ldots x_{h+m})} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \text{ quindi } \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial f}{\partial(x_{h+1} \ldots x_{h+m})}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

cioè $d\varphi_{x'} = \frac{\partial x''}{\partial x'} = -\left(\frac{\partial f}{\partial(x_{h+1} \ldots x_{h+m})}(x', \varphi(x'))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x_1 \ldots x_h)}(x', \varphi(x'))$

e dalla regola di Cramer si ha $\frac{\partial x_{h+j}}{\partial x_i}(p') = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p') = -\frac{det \frac{\partial f}{\partial(x_{h+1} \cdots {}_{j^o \text{ posto}}\, x_i \cdots x_{h+m})}(p)}{det \frac{\partial f}{\partial(x_{h+1} \cdots x_{h+m})}(p)}$

OSSERVAZIONE: a meno di un cambiamento di coordinate si ha che se il differenziale df_p ristretto ad un sottospazio W di dimensione m risulta invertibile, considerato V il sottospazio di dimensione h per cui ogni $x \in \mathbf{R}^{h+m}$ sè eguale a $x_v + x_w$ con $x_v \in V$ e $x_w \in W$ e $x_v \cdot x_w = 0$ allora vi sono $R,\ r$ per cui $\{f(x) = f(p)\} \cap (V \cap B_R(p_v) \times W \cap B_r(p_w))$ è il grafico rispetto a V di una funzione φ e $d\varphi_{x_v} = -\left(\frac{\partial f}{\partial W}(x)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial V}(x)$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE

Il caso limite in dimensione finita dei teoremi di rango e delle funzioni implicite è il seguente teorema di invertibilità locale. Questo teorema come i *precedenti* hanno validità anche in spazi di Banach, ma la sua enunciazine nell'ambito più generale è più chiara.

TEOREMA 8: (Invertibilità Locale) Sia $F : A \subseteq B \to C$ differenziabile con continuità, ove B e C sono due spazi di Banach: $x \mapsto F(x) = y$.
Se dF_p è lineare limitata invertibile da B a C con inversa *limitata*: ovvero

$$\lambda |v|_B \leq |d_p F(v)|_C \leq \Lambda |v|_B$$

allora vi è $R > 0$ per cui :

1) $B_R(p) \subseteq A$, F ristretta a $B_R(p)$ è invertibile, $F(p)$ è *interno* a $F(B_R(p))$

2) se F è differenziabile k volte tale risulta la su "inversa locale".

Detta g la restrizione di F a $B_R(p)$ dalla regola per il differenziale di una funzione composta si ha per ogni $y \in F(B_R(p))$ $d_y g^{-1} = \left(d_{g^{-1}(y)} g\right)^{-1}$

OSSERVAZIONE - l'assunzione che l'inversa del differenziale sia un applicazione lineare continua è in realtà superflua derivando da un teorema astratto (della mappa aperta).

- un'ipotesi "puntuale " che sostituisce la differenziabilità con continutà è che esista solo $d_p F$ con uniformità della stima dell'errore

$$\lim_{(x,z)\to(p,p)} \frac{|F(x) - F(z) - d_p F(x-z)|_C}{|x-z|_B} = 0$$

in tal caso si ha solo che F è localmente invertibile nel senso specificato in 1) e la sua inversa risulta differenziabile solo in $F(p)$.

- La differenziabilità in ogni punto con funzione differenziale continua, garantisce la condizione sopracitata applicando la diseguaglianza del valor medio alla funzione $F(x) - d_p F(x)$.

- La sola differenziabilità nel punto con diffrenziale invertibile non garantisce l'invertibiltà locale come mostra il seguente esempio: $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = 2x^2 \sin \frac{1}{x} + x, \ p = 0$.

OSSERVAZIONE - In dimensione finita $B = C = \mathbf{R}^m$ la condizione di invertibilità del differenziale è equivalente a $det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq m}} \neq 0$

- Quindi grazie al teorema di Cramer si ha:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial (g^{-1})_i}{\partial y_j}(y) = (-1)^{i+j} \frac{det \frac{\partial(F_1 \cdots F_{j-1}, F_{j+1} \cdots F_m)}{\partial(x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m)}(g^{-1}(y))}{det \frac{\partial F}{\partial(x_1 \ldots x_m)}(g^{-1}(y))} = (-1)^{i+j} \frac{det \frac{\partial(y_1 \cdots y_{j-1}, y_{j+1} \cdots y_m)}{\partial(x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m)}}{det \frac{\partial y}{\partial x}}$$

OSSERVAZIONE - Per dedurre il teorema delle funzioni implicite usando il teorema di invertibilità locale si deve *assumere*, oltre alla surgettività di $d_p f$, che esista un sottospazio *chiuso* D per cui $B = Ker\, d_p f \bigoplus D$, fatto sempre vero negli Hilbert e in dimensione finita considerando l'ortogonale al nucleo del differenziale che di per se è chiuso per definizione. Quindi per ipotesi ogni elemento $x \in B$ si scompone in modo unico $x' + x'' \sim (x', x'')$. Non solo: detta I l'identità su $Ker\, d_p f$ e Π la proiezione su $Ker\, d_p f$ parallela a D si considera $F = f + I \cdot \Pi$, per l'ipotesi fatta si ha che Π risulta continua. Quindi si applica a tale F il teorema di invertibilità locale $x'' = F^{-1}(f(x) = x') - x'$.

- Analogamente assumendo, oltre all'iniettività di $d_p f$, che $Im\, d_P f$ sia *chiusa* e vi sia un sottospazio *chiuso* D per cui $C = Im\, d_p F \bigoplus D$ si ottiene il teorema del rango considerando $FB \times D \to C, \ F(x,d) = f(x) + d$.

OSSERVAZIONE - Alcune dimostrazioi del teorema di invertibilità locale si basano sostanzialmente sul teorema di punto fisso con parametri.

- A tal riguardo un lemma inetressante è il seguente: se g è una funzione da A aperto di B spazio di Banach in B per cui $|g(x) - g(z)| \leq c|x - z|$ con $c < 1$, allora $x \mapsto x + g(x)$ è invertibile e la sua inversa soddisfa $|g^{-1}(y) - g^{-1}(w)| \leq \frac{|y-w|}{1-c}$.

Quindi si applica il lemma a $g(x) = (d_p F)^{-1} F(x) - x$.

- Direttamente considerando che si vuole risolvere $y = F(x)$ per x e y abbastanza vicini a p e $f(p)$ rispettivamente, si può considerare equivalentemente il problema di trovare un punto fisso per $(d_p F)^{-1} (y - F(p))$.

Il procedimento di approssimazione dato dal teorema delle contrazioni da una successione di approssimazioni della soluzione cercata $x_{n+1} = x_n - d_F^{-1}(f(x_n) - y)$ che può essere visto come un metodo delle secanti "parallele" al differenziale in p.