Complementi di Analisi Matematica

Laurea Specialistica in Informatica, A.A. 2005-2006

V.M Tortorelli

Corrigenda al compandio sugli spazi metrici

ERRATA	CORRIGE	
$\lvert f\rvert_{L^\infty} = \sup_{x\in A}\lvert f(x)\rvert$	$\lvert f\rvert_{\sup} = \sup_{x\in A}\lvert f(x)\rvert$	3(a)-punto 7^o, pag.5
$\lvert f\rvert_{L^\infty} < C\lvert f\rvert_{L^p}$	$\lvert f\rvert_{\sup} < C\lvert f\rvert_{L^p}$	3(d), pag.5
$\lvert f\rvert_{L^p} < (b-a)\lvert f\rvert_{L^\infty}$	$\lvert f\rvert_{L^p} < (b-a)^{\frac{1}{p}}\lvert f\rvert_{\sup}$	3(d), pag.5
con potenza p sommabile	con potenza p^a sommabile ($p \neq \infty$)	3(g), **Nota** pag.6
ADDENDA	$f \mapsto \sup\lvert f\rvert$ é una norma sulle funzioni limitate	in calce a 3(g), **Nota** pag.6

COMMENTO

1. Si definisce *l'integrale generalizzato alla Riemann* come segue:
   - i- Sia $f \geq 0$ per cui $\min\{f, n\}$ sia Riemann integrabile sugli intervalli
   - ii- Si pone $\int_{\mathbf{R}} f(s)ds =: \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\min\{f(s), n\}ds$. Se l'integrale è finito la funzione si dirà *sommabile*.
   - iii- Per g di segno variabile, quando abbia senso, si pone $\int_{\mathbf{R}} g(s)ds =: \int_{\mathbf{R}}\max\{g(s), 0\}ds - \int_{\mathbf{R}}\max\{-g(s), 0\}ds$
2. Si definisce $|\cdot|_{L^\infty}$ sullo spazio delle funzioni con 'troncate' *Riemann integrabili* come segue:

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N}\; \int_{-n}^{n}\min\{n, |f(t) - g(t)|\}dt = 0$$

$$|f|_{L^\infty} = \inf\{|g|_{\sup} :\; g \sim f\;\}$$

   - Si ha che $|\cdot|_{L^\infty}$ é finito sulle funzioni limitate, od *equivalenti a limitate*: ma **non** é una norma poiché si annulla su funzioni non nulle. Mentre $|\cdot|_{\sup}$ é una norma sullo spazio delle funzioni limitate e suoi sottospazi vettoriali.

   - Chiaramente se f é continua si ha $|f|_{\sup} = |f|_{L^\infty}$.

   - La funzione $|\cdot|_{L^\infty}$ é una norma sullo spazio vettoriale quoziente ottenuto da quello "delle funzioni con troncate Riemann integrabili che siano $\sim$-equivalenti ad una funzione limitata" rispetto alla stessa relazione $\sim$.

3. Analogamente $|\cdot|_{L^p}$ é una norma sullo spazio vettoriale quoziente rispetto alla relazione $\sim$, ottenuto da quello delle funzioni con potenza p^a sommabile alla Rieamnn in senso generalizzato, su cui non è una norma annulandosi su funzioni non nulle.