

**Complementi di Analisi Matematica,
Anno Accademico 2005-2006,
Laurea Specialistica in Informatica**

V.M. Tortorelli
IV foglio di esercizi
18 aprile 2006

Registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo <http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html> ivi selezionando il nome del corso.

Per ulteriori esercizi relativi ai primi elementi di calcolo differenziale vettoriale si veda tra gli altri Courant John, Vol.2 ch.1.1-1.8, A.4, 3.1-3.5.

ESERCIZIO n. 1 Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni nei punti $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ rispetto ad ognuna delle variabili:

$e^{x^4 y^2 z} - xz \sin(xy) - 1$; $\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}$; $(x^2+z^2) \log(x^2+y^2)$; $\frac{x \sin zy}{200+zy \sin x}$; $\frac{x^2 y^2}{x^2+y^4+1}$;
calcolare quindi le funzioni derivate rispetto alla prima variabile delle stesse funzioni.

ESERCIZIO n. 2 Si scriva la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni $x + 2y + 3z$, $(x + 2y + 3z, -x)$, $(x + 2y + 3z, x^2 - y^3 + z^4)$, $(e^{x+y+z+w}, \sin(x + \log(1 + y^2 + w^6)) - z)$, $xyzw$.

NOTA - per una funzione $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ da \mathbf{R} in \mathbf{R}^3 (o \mathbf{R}^2) le cui componenti sono derivabili, il vettore "velocità" dato dalle derivate all'istante t_0 se non nullo dà la direzione tangente alla curva descritta dal cammino γ nel punto $\gamma(t_0)$.

- per una funzione $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ differenziabile in $P = (x_0, y_0, z_0)$, se non nullo il vettore delle derivate parziali valutate in P $(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P))$ è ortogonale nel punto P all'insieme di livello $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = f(P)\}$.

ESERCIZIO n.3 - Si trovi la tangente nel punto $(1, 1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7 + y^7 - 2 = 0$

- Si trovi l'angolo di incidenza in $(1, 1)$ tra le due curve $y = x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.

- Si calcolino seno e coseno dell'angolo di incidenza in $(1, 1)$ tra le due curve (x^3, x^7) , (x^5, x^9) .

- Si trovi la normale nel punto $(1, 1, 2)$ alla superficie immagine di

$(u, v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, v^2)$, $v > 0$

- Si trovino le tangenti nel punto $(0, 0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$.

- Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1, 1, 1)$ e raggio 1 in $(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x, y, z) : \log(x^2 + y^2 + e) = e^z\}$ in $(0, 0, 1)$.

- Si trovi il tangente nel punto $(1, 1, -1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7 + 2y^7 + z^7 - 2 = 0$ e $x^5 + 2y^5 + z^3 - 2 = 0$

- Si trovino le tangenti nel punto $(0, 0, 0)$ dell'insieme definito da $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2(x^2-y^2-z^2)$ e $x - y^2 - z^2 = 0$.

- Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x, y, z) : 2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4\}$, $\{(x, y, z) : 1 + x^2 + y^2 = z^2\}$, $(0, 0, 1)$;

$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = e^z\}$, $\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = e^y\}$, $(1, 0, 0)$;

$\{(x, y, z) : xy = z\}$, $\{(x, y, z) : \cos(2\pi xy) = z\}$, $(1, 1, 1)$.

ESERCIZIO n. 4 Si disegnino le curve $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$ e $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$,

$$x^3 + y^3 - 3axy, \quad a > 0.$$

ESERCIZIO n. 5 - Per la curva in \mathbf{R}^3 $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ la tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi

- * Si mostri che in una curva piana differenziabile ogni corda ha una direzione tangente parallela.

ESERCIZIO n. 6 Si studino la continuità, la derivabilità nelle diverse direzioni, e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|}; \quad \sqrt{|x|} \cos y; \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} e^{-\frac{y^2}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}; \quad \int_0^y f(t,x) dt, \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2);$$

ESERCIZIO n. 7 Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. a - Si provi che f è continua su \mathbf{R} .

b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f .

c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x = 0$.

d- Si studi se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3} e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

ha derivate parziali in ogni punto e si studi la differenziabilità in $(0,0)$.

ESERCIZIO n. 8 Sia $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia x_0 tale che $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dimostrare che la direzione u rispetto a cui:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0} = \max \left\{ \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{x_0} : v \in \mathbf{R}^n, \|v\| = 1 \right\} \text{ è data da } u = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}.$$

ESERCIZIO n. 9 Sia $f \in \mathcal{C}^1(A)$, con A aperto. Dimostrare che f è positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in A$) se e solo se $\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x)$.

ESERCIZIO n. 10 Dato $C \subseteq \mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x,y) = \inf_{(a,b) \in C} \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C è differenziabile:

(a) $C = \{(0,0)\}$; (b) $C = \{(-1,0), (0,1)\}$; (c) $C = \{(-1,0)\} \cup \{(1,b) : b \in \mathbf{R}\}$; (d) $C = \{(-1,0)\} \cup \{(a,b) : (a+1)^2 + b^2 = 1\}$.

ESERCIZIO n. 11 - Sia $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Verificare che: $(F_\rho(\rho, \varphi))^2 + \frac{1}{\rho^2} (F_\varphi(\rho, \varphi))^2 = (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2$ dove $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$.

- Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(R, \varphi, \theta) = f(R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)$. Si calcolino le derivate di F in funzione di quelle di f .

ESERCIZIO n. 12 Sia $g = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Dato il cambio di coordinate $(u, v) = (x, \frac{x}{\sqrt{y}})$, esprimere $g(x, y)$ in funzione di u e v .

ESERCIZIO n. 13 Si consideri la funzione $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Si provi che non è due volte differenziabile in $(0, 0)$

ESERCIZIO n. 14 Si provi che $(\varphi, z) \mapsto (R \cos \frac{\varphi}{R}, R \sin \frac{\varphi}{R}, z)$ conserva i prodotti scalari tra le velocità di cammini (e quindi l'angolo e il modulo).

ESERCIZIO n. 15 - Si provi che una trasformazione lineare da \mathbf{R}^2 in \mathbf{R}^3 conserva gli angoli tra vettori se e solo se i trasformati della base canonica sono ortogonali e di egual lunghezza. Si deduca che una trasformazione differenziabile f tra due aperti del piano conserva gli angoli tra curve incidenti in un punto P se e solo se $D_p f$ conserva gli angoli tra vettori.

- Si deduca che, se $t \mapsto s(t) \in]-1, 1[$ è una funzione derivabile strettamente crescente, $(\varphi, t) \mapsto (\sqrt{1 - s^2(t)} \cos \varphi, \sqrt{1 - s^2(t)} \sin \varphi, s(t))$ è una parametrizzazione della sfera che conserva gli angoli tra curve se e solo se $s'(t) = 1 - s^2(t)$

- Imponendo che $s(0) = 0$ si provi che $s(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$.

- Esprimere la coordinata t così determinata (di Mercatore) con la "latitudine" θ .

ESERCIZIO n. 16 (a) La funzione $f(x, y) = \left(\frac{x-yx}{2xy} \right)$ da \mathbf{R}^2 in se è iniettiva? È surgettiva?

(b) Sia $f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy} \right) = (u, v)$: si studi l'immagine di f , si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$.

ESERCIZIO n. 17 Si disegnino le curve $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

ESERCIZIO n. 18 a) Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi: $x^3y - y^3x = a^2$, $\sin xy - e^{xy} - x^2y = 0$, $x^y = y^x$.

b) Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 + z^2c^2 = 1 : \frac{\partial z}{\partial x}; \quad z^3 + 3xyz = a^3 : \frac{\partial z}{\partial x}; \quad e^z - xy^2z = 0 : \frac{\partial z}{\partial y}.$$

ESERCIZIO n. 19 Sia $f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2xy} \right) = (u, v)$: si studi l'immagine di f , si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$. Si determini le regioni ove il differenziale è invertibile e quindi le regioni ove la funzione è invertibile.

ESERCIZIO n. 20 a) Sia $f(x, y) = \left(\frac{x^2}{y} \right)$, $g(x, y) = \left(\frac{x^3 + xy}{y} \right)$: se ne studino le immagini. Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$, $g^{-1}\{(u, v)\}$.

b) Sia $f(x, y) = \left(\frac{e^{x+y} - e^{x-y} - k^2x}{x+y} \right) = (u, v)$, $k \in \mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$. Si determini un intorno di $(x, y) = (0, 0)$ in cui f è iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}(0, 0)$.

c) Sia $f : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^2$ $f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2e^{x_1 + x_2 y_1 - 4y_2 + 3}}{x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3} \right)$: si verifichi che in un intorno di $(0, 1, 3, 2, 7)$ la regione determinata dalle equazioni $f = (0, 0)$ è un grafico rispetto alle variabili (y_1, y_2, y_3) e si calcoli $\frac{\partial x_1}{\partial y_2}(3, 2, 7)$. È possibile esplicitare (x_1, x_2) in funzione di (y_1, y_2, y_3) in ogni punto di $\{f = (0, 0)\}$?

ESERCIZIO n. 21 a) Sia $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix} = (u, v)$: si trovi un intorno di $P_0 = (1, 1)$ in cui f é iniettiva.

b) Si calcolino le derivate parziali seconde in $U_0 = (0, 1) = f(1, 1)$ dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.

ESERCIZIO n. 22 Sia $T : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ una rotazione, cioè una applicazione lineare del tipo $x \mapsto Rx$, con $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Detto $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dimostrare che: $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$ per ogni $u \in C^2$.

ESERCIZIO n.23 Si esprima $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ rispetto alle coordinate polari.

ESERCIZIO n. 24 Si identifichi lo spazio M delle matrici $n \times n$ con \mathbf{R}^{n^2} , ordinando in modo lessicografico gli elementi delle matrici.

a) Sia $t \mapsto A(t)$ una funzione regolare da $] - 1; 1[$ in M tale che $A(0) = A$ e $A'(0) = I$, ove I è la matrice dell'identità. Si trovi lo sviluppo di Taylor del primo ordine di $A(t)$ in $t = 0$.

b) Se $\Sigma = \{f(A) = 1\}$ si provi che i vettori $X \in M$ tangenti ad $A \in \Sigma$ sono quelli per cui $\text{tr } A^{-1}X = 0$.

c) Si consideri la funzione $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \det A$. Si dimostri se $f(A) \neq 0$: $\nabla f(A) = \det A ({}^t A)^{-1}$ (${}^t A$ indica la trasposta di A).

NOTA: Ad una funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ del tipo $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ si associa la funzione \tilde{F} da \mathbf{C} in se: $z = x + iy$, $\tilde{F}(z) = f(x, y) + ig(x, y)$.

Tra le funzioni con derivate parziali vi sono quelle che ammettono derivata in senso complesso $\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbf{C}} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$.

ESERCIZIO n. 25 - Si provi che le funzioni F differenziabili per cui \tilde{F} ha derivata in senso complesso sono tutte e sole quelle per cui $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$.

- Tra le funzioni da \mathbf{R}^2 in se che ammettono derivate parziali continue le uniche che conservano gli angoli tra due curve sono quelle derivabili in senso complesso.