Complementi di Analisi Matematica,
Anno Accademico 2005-2006,
Laurea Specialistica in Informatica
V.M. Tortorelli

III foglio di esercizi
dal 7 marzo al 16 marzo 2006

Registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

ESERCIZIO n. 1 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$$\frac{xy}{x^2+y^2};\ \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2};\ x^2\log(x^2+y^2);\ \frac{x\sin y}{y\sin x};\quad \frac{x^2y^2}{x^2+y^4};\ \frac{\sin(x|y|)}{x^2+|y|};\ \frac{e^{x^2y}-x\sin(xy)-1}{(x^2+y^2)^2}:\ (x,y)\to(0,0);$$

$$\frac{x+y}{3x+2y};\ \frac{x^3+y^2}{x^2y^2};\ \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3};\ \frac{y^2+x+y}{x^2+x+y};\ \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha+|y|^\alpha};\ \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}:\ (x,y)\to(0,0),\ \alpha>0,\ P,\ Q \text{ polinomi nulli in } (0,0);$$

$$\frac{y}{x^2-y}:\ (x,y)\to(0,0);\ \frac{y}{x^2-y}:\ (x,y)\underset{|y|\geq|x|}{\to}(0,0);$$

$$x-y^2:\ x^2+y^2\to\infty;\ x-y^2:\ x^2+y^2\underset{2y^2\leq x}{\to}\infty;\ \frac{x^2+y}{x^2+y^2+2xy}:\ x^2+y^2\to\infty;$$

$$(*)\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^4},\ \frac{x^\alpha+y^\beta}{x^2+y^4}:\ (x,y)\to(0,0),\quad \alpha,\ \beta>0.$$

ESERCIZIO n. 2 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$
2. $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$
3. $\left\{\begin{array}{l}\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lambda_1\\ \exists \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lambda_2\\ \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lambda_3\end{array}\right. \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$

ESERCIZIO n.4 a) Si studi la continuità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|};\qquad \sqrt{|x|}\cos y;\qquad \int_0^y f(t,x)dt,\ f\in\mathcal{C}(\mathbf{R}^2);\ f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy-\sin xy}{x^6+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

b) Se ne studi la derivabilità nelle diverse direzioni.

ESERCIZIO n. 3 Se $f(x,y)=x^{x^{x^y}}+\log x(\mathrm{artan}(\mathrm{artan}(\mathrm{artan}(\sin(\cos(xy)+\log(x+y))))))$, si calcoli la derivata rispetto a y nel punto $(1,y)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)$.

ESERCIZIO n. 4 a) Se $f : X \to Y$ è continua con inversa su tutto Y continua si provi che per $A \subseteq X$ si ha $f(\partial A) = \partial f(A)$. (si consiglia di usare il linguaggio degli spazi topologici piuttosto che quello degli spazi metrici).
b) Si mostri con un esempio che se f è continua ed invertibile ma la sua inversa non è continua l'eguaglianza non è in generale vera. Quale inclusione è vera?
c) Tenendo conto che nelle definizioni di misura di Peano Jordan e di misura esterna di Lebesgue gli iper-rettangoli cartesiani possono essere sostutuiti da ipercubi si provi che se f è una funzione da $\mathbf{R}^n$ in se Lipschitziana allora trasforma insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.
d) Si provi che una funzione lineare L da $\mathbf{R}^n$ in se trasforma un insieme A Peano Jordan misurabile in un insieme Peano Jordan misurabile. Ricordando che $mis(L[0;1]^n) = |detL|$ si provi che $mis(L(A)) = |detL| mis(A)$.

ESERCIZIO n.5 Si definiscano gli insiemi : $\begin{cases} C_0 = [0;1] \\ C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right) \end{cases}$, $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$

a) Si provi che C_n é decrescente, C chiuso e non vuoto.
b) Si provi che C è l'insieme dei numeri di $[0;1]$ che ammettono un'espressione in base 3 senza 1 ($x = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n}$, $a_n \in \{0, 2\}$).
c) Si provi quindi che C non ha ne punti isolati ne punti interni, in particolare coincide con la sua frontiera, ed è più che numerabile.

ESERCIZIO n.6 Se $A \subseteq [0;1]$ e $a \in [0;1]$, si denoti con $T_a A$ l'insieme $aA \cup ((1-a) + aA)$ (*e.g.* $C_n = T_{\frac{1}{3}}^n[0;1]$). Data $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una qualsiasi successione di numeri strettamente tra 0 ed $\frac{1}{2}$ si definisca $\begin{cases} D_0 = [0;1] \\ D_{n+1} = T_0 \cdots T_{a_n}[0;1] \end{cases}$, $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$

a) Si provi che $D_{n+1} \subseteq D_n$, che D_n è composto da 2^n intervalli chiusi. Si calcoli la misura di D_n e si mostri una successione per cui tali misure convergno ad un numero strettamente compreso ta 0 ed 1.
b) Si consideri la funzione $F_n : [0;1] \to [0;1]$ crescente, continua, affine a tratti, e nulla in 0 che trasforma C_n in D_n. Si provi che D è chiuso, senza punti isolati, senza punti interni e più che numerabile. Si mostri che se il limite delle misure dei D_n è non nullo allora D non è misurabile secondo Peano Jordan.
c) Provare che la successione decrescente delle funzioni caratteristiche $x \mapsto \chi_{D_n}(x)$ dei D_n é di Cauchy rispetto alla seminorma $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|dx$.
d) Si provi che se vi fosse una funzione Riemann g integrabile per cui $\int_0^1 |g(x) - \chi_{D_n}(x)|dx \to 0$, $n \to \infty$, allora sul complementare di ogni D_n, tranne al più un insieme di misura nulla secondo Peano. g dovrebbe essere nulla.

ESERCIZIO n.7 a) Si provi che data una funzione ψ Riemann integrabile
$m^*\{x : |\psi(x)| \geq m\} \leq \frac{1}{m} \int |\psi(x)|dx$
b) Ciò assodato, si completi quanto enunciato nell'ultimo punto del precedente esercizio mostrando che g deve essere eguale ad 1 su D tranne al più un insieme di misura di Peano nulla. Si concluda quindi mostrando che la seminorma $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|dx$ non è completa.

ESERCIZIO n. 8 Si dica in quali sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ le seguenti successioni di funzioni, per $n \to +\infty$, convergono puntualmente, in quali uniformemente, giustificando la risposta:

$$x^n\ ;\quad nx^n\ ;\quad \frac{1}{1+x^{2n}};\ \frac{n^2}{1+x^{2n}};\ \frac{1}{1+(x-n)^2}\ ;\quad \min\{n;\frac{1}{x^2}\}\ ;\quad \frac{(1+x^2)^{n+1}-1}{(1+x^2)^n}\ ;\quad \frac{1}{x^n+nx}\ ;$$
$$\sin\frac{x}{n};\ \sin\frac{x^n}{1+x^{2n}};\ n^2xe^{-nx}\ ;\ n^{\sqrt{x}}e^{-\frac{n}{x}}\ ;\ e^{-n(e^{-nx})}\ ;\ x^{\sqrt{n}}e^{-\frac{x}{n}}\ ;\ |n+x|^{n+x}\ ;\ e^{-nx}\log nx\ ;$$
$$(\sin x)^n;\ \left(\frac{1}{n}+\sin^2 x\right)^n\ ;\ \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy\,.$$

ESERCIZIO n.9 a) Per $n \in \mathbf{N}$ si definisca $f_n(x) = \frac{1}{n}(\mathrm{artan}(nx+n) - \mathrm{artan}x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ della successione $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
- Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ della serie $\sum_n f_n$.

b) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ della successione di funzioni: $\dfrac{n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}$.

c) Per $n \in \mathbf{N}$ si definisca: $g_n(x) = \begin{cases} \frac{x^3(\cos x)^n}{1-\cos x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

d) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi dei domini specificati delle successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, e detto f il limite si studi la convergenza puntuale ed uniforme e totale della serie $\sum_n (f_n - f)$:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1\ ,\quad x\in[0;1] \\ f_{n+1}(x) = \sqrt{xf_n(x)} \end{cases}\qquad \begin{cases} f_0(x) = \cos x\ ,\quad x\in\mathbf{R} \\ f_{n+1}(x) = \cos\left(f_n(x)\right) \end{cases}\qquad \begin{cases} f_0(x)\ ,\quad x\in[0;A] \\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(y)dy \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 10 Provare che la successione di funzioni: $f_n(x) = (\sin(nx))^{2n}$, $x \in [0;2\pi]$ non converge in tutti i punti del dominio. Si studi la convergenza verso zero delle successioni numeriche date dai seguenti integrali:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx\ ,\quad \int_0^{2\pi} nf_n(x)dx.$$

ESERCIZIO n. 11 Dopo aver giustificato che le integrande sono integrabili si calcolino gli integrali giustificando la risposta: $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3}\left(\sum_n ne^{-nx}\right)dx\ ,\quad \int_0^{\infty}\left(\sum_n \frac{1}{4^n+x^2}\right)dx.$

DEFINIZIONE: data $f_n : X \to (V, \|v\|)$ successione di funzioni limitate a valori in uno spazio normato si dice che $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(x)$ converge *totalmente* se la serie numerica $\sum \|f(x)\|$ converge. Se lo spazio è completo allora la convergenza totale implica la convergenza in norma ma non viceversa.

ESERCIZIO n. 12 Si dica in quali sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ le seguenti serie di funzioni, convergono puntualmente, in quali uniformemente, in quali totalmente, giustificando la risposta:

$$\sum_n \frac{1}{1+x^n}\ ;\quad \sum_n \frac{1}{x^n+nx},\ x>0\ ;\quad \sum_n \frac{x^3}{1+x^{2n}}\ ;\quad \sum_n \frac{x^n}{1-x^n};\ \sum_n \sin\frac{x}{2^n}\ ;\quad \sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$$
$$\sum_n n(\sin x)^n;\ \sum_n \int_1^{\infty} e^{-xny^2}dy;\ \sum_n (\mathrm{artan}(nx+n) - \mathrm{artan}nx)\ ;\quad (*)\ \sum_n \frac{1}{n+(x-n)^2},\ x\in\mathbf{R}.$$

ESERCIZIO n.13 a) Si discuta la convergenza puntuale di ogni funzione tra quelle elencate.
b) Se ne studi la convergenza uniforme: sul rispettivo dominio di definizione, sulle palle aperte, chiuse e sui complementari di queste.
c) Quando specificato se ne studi la convergenza rispetto alle norme o distanze indicate.

(a) $n^{\sqrt{x}}e^{-\frac{n}{x}}$	(b) $e^{-n(e^{-nx})}$, $\int_{-\infty}^{0}\lvert f\rvert$	(c) $x^{\sqrt{n}}e^{-\frac{x}{n}}$
(d) $\lvert n+x\rvert^{n+x}$	(e) $\left(\frac{1}{n}+\sin^2 x\right)^n$, $\int_0^{2\pi}\lvert f\rvert$	(f) $\sin\frac{x}{n}$
(g)$e^{-nx}\log nx$, $\int_0^{+\infty}\lvert f\rvert$	(h) $\sin\frac{x^n}{1+x^{2n}}$, $\int\lvert f\rvert$	
(i) $\frac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}$	(j) $f_n := \frac{1}{x^n+y^n+ny}$, $x,y>0$ si studi anche la serie numerica $\sum_n \sup f_n$	(k) $\sum_n f_n$
(l) $\sum_n n(\sin x)^n$	(m) $\sum_n e^{n(\mathcal{R}ez-\frac{z}{2}+1)}$	(n) $\sum_n \int_1^{+\infty} e^{-xy^2}dy$
(o) $\int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy$	(p) $\sum_n \frac{\lvert x-y\rvert^n}{n!}\log(n+x^2+y^2)$	

ESERCIZIO n.14 Studiare la continuitá delle seguenti funzioni tra spazi normati:
a) $Id : (C^1[0;1], \int\lvert f\rvert + \int\lvert f'\rvert) \to (C[0;1], \sup\lvert f\rvert)$
b) Data $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, se $h \in \mathbf{R}^n$, si definisce $\tau_h f$ la funzione $x \mapsto f(x+h)$, e quindi si definisce l'operatore τf da $\mathbf{R}^n$ a valori funzioni dato dall'associazione $\tau f : h \mapsto \tau_h f$:
- data f limitata $\tau f : \mathbf{R}^n \to (\mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \sup\lvert f\rvert)$, ove $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ sono le funzioni limitate.
- data f limitata uniformemente continua e limitata $\tau f : \mathbf{R}^n \to (\mathcal{UCB}(\mathbf{R}^n), \sup\lvert f\rvert)$ ($\mathcal{UCB}(\mathbf{R}^n)$ funzioni uniformemente continue e limitate).
- data f continua e con norma L^p, $(\int\lvert f\rvert^p dx)^{\frac{1}{p}}$ finita, $\tau f : \mathbf{R} \to (\mathcal{C}(\mathbf{R}), \lvert f\rvert_{L^p})$.

c)$P : (C[0;1], \int\lvert f\rvert) \to (C[0;1], \sup\lvert f\rvert)$, ove Pf é la funzione $x \mapsto \int_0^x f^2(s)ds$.
d) $Id : (C[0;1], \sup\lvert f\rvert) \to (C[0;1], \int\lvert f\rvert)$, e) $Id : (C[0;1], \int\lvert f\rvert) \to (C[0;1], \sup\lvert f\rvert)$
f) $Id : (C[0;1], \int\lvert f\rvert) \to \left(C[0;1], \sqrt{\int\lvert f\rvert^2}\right)$ g) $\frac{d}{dx} : (C^1[0;1], \sup\lvert f\rvert) \to (C[0;1], \int\lvert f\rvert)$
h) $\frac{d}{dx} : (C^1[0;1], \int\lvert f\rvert + \int\lvert f'\rvert) \to (C[0;1], \sup\lvert f\rvert)$

ESERCIZIO n.15 Per $n \in \mathbf{Z}$ sia $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, $t \in [0;2\pi]$. Per $f \in C([0;2\pi], \mathbf{C})$ si ponga $c_n = \int f(t)\overline{e_n(t)}dt =: (f \cdot e_n)$.

a) Si provi $(e_m \cdot e_n) = \delta_{mn}$, $\lvert S_N\rvert^2 = \sum_{n=-N}^{N}\lvert c_n\rvert^2 \le \int_0^{2\pi}\lvert f(t)\rvert^2 dt$, e che per ogni successione $\gamma_n \in \mathbf{C}$ con $\sum\lvert\gamma_n\rvert^2 < \infty$ si ha $S_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n\gamma_n$. è di Cauchy rispetto alla norma
b) Per funzioni reali si considerino $p_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $p_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $d_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$, $n > 0$ e $a_n = \int f(t)p_n(t)dt$, $b_n = \int f(t)d_n(t)dt$ e si provino gli analoghi.

ESERCIZIO n.16 a) Provare $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = b_N \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N-1}(b_{n+1}-b_n)\sum_{k=0}^{n} a_k$

b) Provare che se a_n ha somme limitate (cioè $\sup_N\lvert\sum^N a_n\rvert \le C < \infty$) e b_n è infinitesima con variazione totale finita (cioè $\sum^\infty\lvert b_{n+1}-b_n\rvert < \infty$, e.g. decrescente) allora $\sum a_n b_n$ converge.
c) Provare che se a_n ha serie convergente ($\exists\sum^\infty a_n$) e b_n è solo con variazione totale finita allora $\sum a_n b_n$ converge.
d) Con le notazioni del precedente esercizio se $f(t) = t$ si studi la convergenza uniforme nei sottoinsiemi di $[0;2\pi]$ della serie di funzioni $S_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n c_n$.
e) Se $f(t) = t$ si studi la convergenza uniforme nei sottoinsiemi di $[-\pi;\pi]$ della serie di funzioni $S_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n(t)\int_{-\pi}^{\pi} t\overline{e_n(t)}dt$.
f) Se $f(t) = t^2 - 2\pi t$ si studi la convergenza uniforme nei sottoinsiemi di $[0;2\pi]$ della serie di funzioni $S_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n c_n$.

ESERCIZIO n.17 a) Usando il teorema di Stone Weiestrass astratto (un'algebra di funzioni continue chiusa per coniugio che separi i punti e contenga le costanti è densa) si provi che lo spazio vettoriale generato da e^{int}, $n \in \mathbf{Z}$ è denso con la norma uniforme nello spazio delle funzioni continue periodiche a valori complessi.
b) Si deduca che lo spazio vettoriale generato dalle costanti e dalle funzioni $\cos nt, \sin nt$ è denso rispetto alla norma $\left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ nelle funzioni con quadrato integrabile
c) Si provi che $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \lim_n \sum_{-n}^{n} |\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt|^2$

ESERCIZIO n.18 Si consideri lo spazio vettoriale V delle funzioni continue a media nulla su $[0;1]$ (*i.e.* $\int_0^1 v(t)dt = 0$). Siano $(Cv)(x) = \int_0^x \int_0^y v(t)dtdy - x\int_0^1 \int_0^y v(t)dtdy$,
$(Bv)(x) = (Cv)(x) - \int_0^1 (Cv)(t)dt$
a) Si provi che l'immagine di B sono le funzioni derivabili due volte con continuità, periodiche e a media nulla con derivate prime periodiche e a media nulla. Si scriva l'inversa di B.
b) Si trovino gli autovalori e le relative autofunzioni di B,
c) Si mostri che B è simmetrico rispetto al prodotto scalare $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$
d) Si provi che B trasforma limitati rispetto alla norma $(\int f^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}$ in relativamente compatti rispetto alla norma uniforme.

Una serie del tipo $\sum a_n(z-z_0)^n$, $a_n, z \in \mathbf{C}$ si dice *serie di potenze* di *centro* z_0.
Se $\sum a_n w^n$ converge allora $\sum_n |a_n| r^n$ converge per ogni $r < |w|$, e quindi $\sum a_n z^n$ converge totalmente ed uniformemente nelle palle di centro 0 e raggio strettamente minore di $|w|$
Se per qualche w la serie converge $\sup\{r : \sum |a_n| r^n \text{converge}\}$ si dice *raggio di convergenza*, altrimenti si dice che la serie ha raggio di convergenza nullo.
Dal criterio della radice per le serie a termini positivi si deduce che il reciproco di $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ è eguale al raggio di convergenza ($\limsup = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{k\geq n}$)

ESERCIZIO n. 19 Calcolare le serie $\displaystyle\sum_n \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, $\displaystyle\sum_n \frac{x^{4n}}{4n-3}$, $\displaystyle\sum_n \frac{(-x)^{n+1}}{n(n+1)}$.

ESERCIZIO n.20 Si studi il dominio di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_n x^{4n-2}\,,\quad \sum_n \frac{x^n}{n(n+1)}\,,\quad \sum_n x^n 10^n\,,\quad \sum_n \frac{(-x)^n}{n}\,,\quad \sum_n \frac{x^n}{n10^{n-1}}\,,\quad \sum_n \frac{x^n \sin n!}{n(n+4)}\,,$$
$$\sum_n x^n n!\,,\quad \sum_n x^{2(n-1)}2^{n-1}\,,\quad \sum_n \frac{x^n}{n(n+1)},\quad \sum_n \frac{(-x)^n}{n-\log n}\,,\quad \sum_n \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!},\quad \sum_n x^{n!},\quad \sum_n 2^n x^{n^2}.$$

ESERCIZIO n. 21 Si studi la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni: $\displaystyle\sum_n \frac{\log(1+nx)}{nx^n}$, $\displaystyle\sum_n \frac{a^n}{n^x}\ (a>1)$, $\displaystyle\sum_n \frac{a^n}{n^x}\ (a<1)$, $\displaystyle\sum_n x^{n^2} a^n$, $\displaystyle\sum_n \frac{\log n}{n^x}$

ESERCIZIO n. 22 Si studi il seguente problema di Cauchy per serie di potenze e si discuta

la convergenza della serie determinata: $\begin{cases} (1+x^2)y''(x) + y(x) = 0\,, & x \in \mathbf{R} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

ESERCIZIO n.23 Si studino le seguenti serie di potenze in campo complesso all'interno del dominio di convergenza e si calcoli il limite delle prime due:

$$\sum_n z^n\,,\quad \sum_n \frac{z^n}{n(n+1)}\,,\quad \sum_n \frac{z^n}{n!}\,,\quad (*)\ \sum_n \binom{\alpha}{n} z^n\ (\alpha \in \mathbf{C}).$$