Complementi di Analisi Matematica

Anno Accademico 2003-2004

Laurea specialistica in Informatica

R.Stasi, V.M. Tortorelli

Soluzioni degli esercizi della I prova in itinere, 31 marzo 2004

1.a- Dire se esiste il limite $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=\frac{\tan(x^2+y^2)}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

$f(x,0)=\frac{\tan x^2}{x^2}\to 1$, $f(x,x)=\frac{\tan 2x^2}{x^2\sqrt{2}}\to\sqrt{2}$
R.: NO

1.b- Si calcoli il differenziale della funzione $\psi(x,y)=g(f(x,y))$ in $(1,1)$,
ove $f(x,y)=(xy,x^2-y^2)$, $g(u,v)=(\sin v,\cos u)$.

Derivando $g(f(x,y))=(\sin(x^2-y^2),\cos xy)$ e calcolando in $(1,1)$ si ottiene $\psi^1_x=2$, $\psi^1_y=-2$, $\psi^2_x=-\sin 1$, $\psi^2_y=-\sin 1$.

R.: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -\sin 1 & -\sin 1 \end{pmatrix}$

1.c- Si calcoli il polinomio di Taylor del terzo ordine in $(0,0,0)$ della funzione $(\sin xyz,\cos xyz)$.

Dagli sviluppi in una variabile in $t=0$ $\sin xyz=xyz+o(xyz)$, $\cos xyz=1+O(x^2y^2z^2)$. Ma $xyz=O(|(x,y,z)|^3)$ per unicità del polinomio di Taylor:
R.: $(xyz,1)$

2- Si calcolino i punti critici della funzione $f(x,y)=2x^4-x^2e^y+e^{4y}$ specificando se si tratta di punti di massimo o minimo relativo o meno.

Imponedo $f_x=8x^3-2xe^y=0$, $f_y=-x^2e^y+4e^{4y}=0$ si ha $4x^2=e^y$ e $x^2=4e^{3y}$. Quindi $e^y=1/4$, $x^2=1/16$ e i punti ove si annulla il differenziale sono $(1/4,\log 1/4)$, $(-1/4,\log 1/4)$.
Inoltre $f_{xx}(\pm 1/4,\log 1/4)=24x^2-2e^y=24/16-2/4=1>0$, $f_{yy}(\pm 1/4,\log 1/4)=-1/16\cdot 1/4+16/4>3$, $f_{xy}(\pm 1/4,\log 1/4)=f_{yx}=-2xe^y=\pm 1/2\cdot 1/4=\pm 1/8$ per cui sia la traccia che il determinante della matrice Hessiana sono positivi
R.: $(1/4,\log 1/4)$, $(-1/4,\log 1/4)$, p.ti di minimo

3- Si calcoli $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{x=1,y=\sqrt{2}}$ per la funzione definita implicitamente in un intorno di $(1,\sqrt{2},1)$ da
$f(x,y,z)=e^{x^2-y^2+z^2}-xz=0$.

Il punto $(1,\sqrt{2},1)$ verifica la condizione, $f_z(x,y,z)=2ze^{x^2-y^2+z^2}-x$ non si annulla nel punto $(1,\sqrt{2},1)$ ove f è nulla. Quindi $z=z(x,y)$ è ben definita e $\frac{\partial z}{\partial x}(1,\sqrt{2})=-\frac{f_x(1,\sqrt{2},1)}{f_z(1,\sqrt{2},1)}$
R.: -1

4- Si calcoli il valore massimo e il valore minimo di $f(x,y,z)=2y+3z$, sull'insieme
$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\(x-1)^2+(z-1)^2=1\end{cases}$

I punti ove il differenziale del vincolo non ha rango massimo sono $(0,1,1)$ e $(2,1,1)$. Ivi la funzione vale 5.
Nei rimanenti punti del vincolo si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Si ha: $0=(\lambda+\mu)(x-1)$, $2=\lambda(y-1)$, $3=\mu(z-1)$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-1)^2+(z-1)^2=1$, più la condizione di rango massimo. La prima equazione ha come

soluzioni $\mu = -\lambda$. Ma sostituendo nelle ultime due, elevandole al quadrato ed usando le due relazioni del vincolo si ottine che $4 = 9$. Quindi $\lambda \neq -\mu$ e dalla prima equazione si ottiene $x = 1$. Dalle relazioni del vincolo si ha $(y-1)^2 = 1 = (z-1)^2$

Per cui si ottengo come soluzioni $(1,0,0)$, $(1,0,2)$, $(1,2,0)$, $(1,2,2)$, che sono regolari per il vincolo. La funzione vale rispettivamente 0, 6, 4, 10.

Confrontando:

R.: valore minimo 0, valore massimo 10.

5- Si calcoli l'integrale di $f(x,y,z) = z$ sulla superficie definita da
$x^2 + y^2 + 3z^2 = 4$ e $z > 0$.

La superficie è il grafico di $z = \sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{3}}$. Quindi l'elemento d'area è $\sqrt{1+|\nabla z|^2} = \sqrt{1+(-x/3z)^2+(-y/3z)^2} = 1/3z\sqrt{9z^2+x^2+y^2} = 1/3z\sqrt{12-2x^2-2y^2}$.

L'area sarà $sqrt2/3\int_{4>x^2+y^2}\sqrt{6-x^2-y^2}dxdy = 2\pi\sqrt{2}/3\int_0^2\sqrt{6-r^2}rdr = \pi\sqrt{2}/3\int_0^4\sqrt{6-t}dt = 2\pi\sqrt{2}/9(6^{3/2}-2^{3/2}) = 4^{3/2}\pi/9(3^{3/2}-1)$

R.:$8\pi/9(3^{3/2}-1)$

8- Per quali α il sottografico di $(x^2+y^2)^\alpha$ su $|x|+|y| \leq 1$ ha volume finito?

Essendo la funzione non negativa il volume del sottografico è dato dall'integrale sul dominio. Poichè il dominio contiene la palla di centro $(0,0)$ e raggio $1/\sqrt{2}$ ed è contenuto in quella di raggio 1, e la funzione è non coninua solo in $(0,0)$, è equivalente vedere quando è finito l'integrale sulle palle:

$\int_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)^\alpha dxdy = 2\pi\int_0^1 r^{2\alpha}rdr = 2\pi\int_0^1 r^{2\alpha+1}dr$

che è finito se e solo se $2\alpha+1 > -1$, quindi:

R.: $\alpha > -1$