Complementi di Analisi Matematica
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Appunti della nona lezione e di parte della decima: 2 aprile 2004

Concentrazione delle funzioni sommabili Se f è sommabile in senso generalizzato si ha:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|x|\geq R}|f(x)|dx+\int(|f(x)|\vee R-R)dx=0.$$

Per comodità di scrittura si consideri $f\geq 0$. Per definizione $\int f=\lim_{R\to+\infty}\int_{|x|\leq R}f\wedge R$.
Se $k\geq R$ si ha $\int_{|x|\leq R}f\wedge R\leq\int_{|x|\leq k}(\chi_{|x|\leq R}f)\wedge k$ che per $k\to\infty$ tende a $\int\chi_{|x|\leq R}f=\int_{|x|\leq R}f$.
Quindi $\int f\leq\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leq R}f\leq\int f$. D'altronde $f\vee R-R=f-f\wedge R$ il cu integrale per R grande è minore di $\varepsilon+\int_{|x|\geq R}f$.

Convergenza uniforme i- Limite uniforme di funzioni continue è continuo.
ii- Limite uniforme di funzioni Riemann integrabili su A è Riemann integrabile su A.
iii- Se $\psi:\mathbf{R}^M\to\mathbf{R}^K$ è uniformemente continua e f_n, a valori in $\mathbf{R}^M$, converge uniformemente ad f su $A\subseteq\mathbf{R}^N$ allora $\psi\circ f_n$ converge uniformemente a $\psi\circ f$.
In particolare la somma di due successioni uniformemente convergenti è uniformemente convergente alla somma dei limiti.
iv- Se $\psi:\mathbf{R}^M\to\mathbf{R}^K$ è solo continua e f_n converge uniformemente ad f limitata su $A\subseteq\mathbf{R}^N$ allora $\psi\circ f_n$ converge uniformemente a $\psi\circ f$.
In particolare il prodotto di di due successioni uniformemente convergenti ed equilimitate è uniformemente convergente al prodotto dei limiti.

ii- Per il secondo asserto si tratta di provare che dato ε vi sono due suddivisoni per cui $\sum_{Q\in\mathcal{G}}\sup_Q fme(Q)-\sum_{Q\in\mathcal{F}}\inf_Q fme(Q)$ è minore di ε.
Si osserva che per ogni N-rettangolo Q contenuto in A $|\sup_Q f_n-\sup_Q f|$ e $|\inf_Q f_n-\inf_Q f|$ sono minori di $\sup_A|f-f_n|$. Quindi per due suddivisioni G e F si ha:
$\sum_{Q\in\mathcal{G}}\sup_Q fme(Q)-\sum_{Q\in\mathcal{F}}\inf_Q fme(Q)\leq 2\sup_A|f-f_n|+\Big(\sum_{Q\in\mathcal{G}}\sup_Q f_nme(Q)-\sum_{Q\in\mathcal{F}}\inf_Q f_nme(Q)\Big)$
Fissato ε si considera n per cui il primo addendo è minore di ε. Per questo preciso n vi sono due suddivisioni $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ per cui il secondo addendo è anch'esso mionore di ε. Quindi fissato ε per queste due suddivisioni si ha quanto voluto.

iii- Per il terzo asserto fissato ε si considera δ per cui $\psi(x)-\psi(y)|\leq\varepsilon$ quando $|x-y|\leq\delta$. Come secondo passo si considera $\overline{n}$ per cui se $n\geq\overline{n}$ è $\sup_A|f_n-f|\leq\delta$.
iv- Il quarto asserto segue osservando che se f è limitato tutte le f_n sono limitate da eguali costanti indipendenti da n. Ma allora le loro immagini son in un compatto e ψ ristretta ad esso è uniformemente continua.
NOTA: in effetti una successione di funzioni che converge uniformemente è equilimitata se e solo se la funzione limite è limitata. Se invece la funzione limite non è limitata le funzioni della successione da un certo indice in poi non sono limitate.

Limiti di integrali. È immediato verificare che se

1- f_n converge uniformemente ad f su A
2- non solo le f_n ma anche f è sommabile su A
3- A ha misura finita

allora $\int_A f_n\to\int_A f$. Infatti:
$|\int_A f_n-\int_A f|=|\int_A(f_n-f)|\leq\int_A|f_n-f|\leq\int_A\sup_A|f_n-f|=\sup_A|f_n-f|m(A)$

Continuità degli integrali dipendenti da parametro Si consideri $f:(x,y)\in P\times A\mapsto f(x,y)$ per cui:

1- $\sup_{y\in A}|f(x,y)-f(x_0,y)|\to 0$ se $x\to x_0$, continuità in x_0 uniforme rispetto a $y\in A$.
2- per ogni x la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è sommabile su A
3- A ha misura finita

allora $F(x)=\int_A f(x,y)dy$ è continua in x_0.
Per estendere il risultato a domini di misura non finita, se pur misurabili, si introduce la seguente nozione

Definizione: Una famiglia di funzioni sommabili $x\mapsto f_\lambda(x)$ si dice *sommabile uniformemente* (rispetto al parametro λ) se:

$\sup_\lambda\left|\int f_\lambda dx-\int_{|x|\leq m}|f_\lambda|\wedge mdx\right|\to 0.$

Ovvero gli integrali delle troncate convergono agli integrali uniformemente rispetto a λ.

- *Famiglie "equidominate"*. Se per ogni x e λ si ha $|f_\lambda(x)| \le g(x)$ per una stessa funzione sommabile g (che non dipende da λ!) allora la famiglia è sommabile uniformemente. Tipiche funzioni di confronto sono le $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Proposizione: Se la successione f_n è di funzioni sommabili uniformemente rispetto ad n e converge uniformemente ad f *sui limitati* allora f è sommabile e il suo integrale è il limite degli integrali.

La sommabilità di f si deduce dalla R.-integrabilità delle sue troncate e dal passaggio al limite per gli integrali delle troncate. Quindi

$$\begin{aligned} |\int f_n - \int f| \le \quad & |\int_{|x|\ge m} f| + |\int_{|x|\le m} f_n - \int_{|x|\le m} f| + |\int_{|x|\ge m} f_n| \le \\ & |\int_{|x|\ge m} f| + |\int_{|x|\le m} f_n - \int_{|x|\le m} f| + \sup_n |\int_{|x|\ge m} f_n| \end{aligned}$$

Fissato ε per concentrazione e sommabilità uniforme si trova m per cui il primo e l'ultimo addendo siano minori di ε. Quindi per tale m si trova $\overline{n}$ per cui se $n \ge \overline{n}$ il secondo addendo è minore anch'esso di ε (passaggio al limite su domini di misura finita).
In conclusione fissato ε si è trovato $\overline{n}$ t.c. se $n \ge \overline{n}$ $|\int f_n - \int f| \le 3\varepsilon$

Corollario Se $f : (x,y) \in P \times A \mapsto f(x,y)$ è continua in x_0 uniformemente rispetto a $y \in A$, per ogni x le $y \mapsto f(x,y)$ sono sommabili, e se $|f(x,y)| \le g(y)$ con g sommabile su A allora $F(x)$ è continua in x_0.

Vi sono i seguenti criteri di convergenza meno impegnativi (e relativi corollari per la continuità) :

Convergenza monotona se una successione *crescente* di funzioni sommabili *non negative* converge semplicemente punto per punto ad una funzione *anch'essa sommabile* allora gli integrali convergono agli integrali del limite.

Questo criterio può essere dimostrato riducendosi a una successione crescente di funzioni, di una variabile, continue su un intervallo chiuso, e convergente ad una costante e quindi usando il seguente:
Lemma del Dini Se

1- $x \in K \mapsto f_n(x)$ sono funzioni continue su K

2-K compatto

3- $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$ per ogni $x \in K$

4- $x \mapsto f(x) =_{\text{def}} \lim_n f_n(x)$ è continua su K

allora la convergenza è uniforme.
Convergenza dominata se una successione *equidominata* di funzioni sommabili converge semplicemente punto per punto ad una funzione *anch'essa sommabile* allora gli integrali convergono agli integrali del limite.

La cornice teorica più adatta per provare tale teorema è quella dell'integrazione alla Lebesgue che estende la sommabilità generalizzata alla Riemann. In tale ambito più generale le ipotesi di sommabilità del limite risultano superflue.

Derivata di integrali. Un criterio per derivare un integrale dipendente da parametro si deduce da quanto detto: sia $f : (x,y) \in P \times A \mapsto f(x,y)$ per cui $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$:

1- $y \mapsto f(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ sono sommabile in A per ogni x

2- $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ uniformemente in $y \in A$

3- $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x',y)\right| \le g(y)$ sommabile in A,

si ha che $F(x) = \int_A f(x,y)dy$ è derivabile e $F'(x) = \int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$.
Infatti si scrive il rapporto incrementale di $F(x)$ che è l'integrale del rapporto incrementale di $x \mapsto f(x,y)$ che converge uniformemente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. D'altra parte tale rapporto incrementale per il teorema di Lagrange è $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{x,y,h}, y)$. Ma indipendentemente da ξ è dominato da una funzione sommabile. Si può quindi passare al limite.
Corollario In particolare ciò avviene se se $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C([a,b] \times [\alpha,\beta])$: la condizione 2- segue da Lagrange e dall'uniforme continuità della derivata, la condizione 3- dalla limitatezza della derivata che è continua su un compatto.

Criterio di derivabilità conseguente al teorema di convergenza dominata
Utilizzando il criterio di convergenza dominata la pesante condizione sul limite uniforme può essere omessa e per "scambiare derivata con integrale" bastano le seguenti ipotesi:
la funzione è sommabile rispetto alla seconda variabile, la sua derivata rispetto alla prima variabile esiste sempre è non solo sommabile nella seconda variabile ma in modulo minore di una funzione sommabile ed indipendente dalla prima variabile.

la dimostrazione è identica alla precedente: il rapporto incrementale dell'integrale è l'integrale del rapporto incrementale rispetto alla prima variabile della funzione che tende alla derivata parziale. D'altra parte per

Lagrange il rapporto è uguale alla derivata rispetto alla prima variabile in un valore intermedio del primo argomento e quindi è dominato indipendentemente dalla prima variabile dalla funzione che maggiora la derivata. Per convergenza dominata si conclude.

Continuità globale di $F(\alpha,\beta,x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)dy$ con $f\in C([a,b]\times[A,B])$
Differenziabilità di $F(\alpha,\beta,x)$ con $f,\ \frac{\partial f}{\partial x}\in C\left([a,b]\times[A,B]\right)$.
Derivata di $G(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$, con $f,\ \frac{\partial f}{\partial x}\in C([a,b]\times[A,B])$ e $\alpha,\ \beta\in C^1([a,b])$ (limitate tra A e B):

$G'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy+f(x,\beta(x))\beta'-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$

Formula elementare di Gauss-Green nel piano per integrali non orientati in termini del vettore normale.
Sia D un dominio normale regolare rispetto ad una delle direzioni coordinate. Per esempio $D=\{(x,y):\alpha(x)\le y\le\beta(x)\ ,\quad x\in[a;b]\}$ con $\alpha,\ \beta$ differenziabili con continuità per cui il bordo di D può essere parametrizzato come cammino regolare a tratti *semplice* e chiuso. Tranne che nei quattro vertici risulta ν il vettore unitario normale al bordo di D ed *esterno* a D (con seconda componente negativa sul grafico di α positiva su quello di β), che risulta una funzione continua a tratti.

Con questa convenzione se $V=(f,g)$ sono funzioni differenziabili con continuità su D si ha

$$\int_D(f_x(x,y)+g_y(x,y))dxdy=\int_{\partial D}f\nu_1dl+\int_{\partial D}g\nu_2dl=\int_{\partial D}\langle V,\nu\rangle d\mathcal{L}$$

Estensione La stessa formula vale per domini che sono unioni di domini normali regolari rispetto ad una delle direzioni coordinate con parti interne disgiunte. In effetti gli integrali sui bordi comuni ai vari pezzi si cancellano essendo le normali esterne con direzioni opposte.

Derivabilità del limite di una successione di funzioni. Un criterio elementare è il seguente
I criterio Sia $x\mapsto f_n(x)$ una successione di funzioni differenziabili con continuità su $[a;b]$ per cui:

1- $f_n'\to g$ uniformemente su $[a;b]$
2- per un certo $x_0\in[a;b]$ la successioni di numeri $f_n(x_0)$ convergea un certo λ

allora

3- la successione di funzioni f_n converge uniformemente du $[a;b]$
4- la funzione limite è derivabile e ha come limite g.

La dimostrazione: per il teorema fondamentale del calcolo passando al limite sotto segno di integrale per convergenza uniforme si ha la convergenza punto per punto delle f_n:

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f_n'(t)dt\to\lambda+\int_{x_0}^x g(t)dt$$

Tale convergenza è uniforme:

$$\sup_{x\in[a;b]}\left|f_n(x)-\left(\lambda+\int_{x_0}^x g(t)dt\right)\right|=\sup_{x\in[a;b]}\left|\int_{x_0}^x f_n'(t)dt-\int_{x_0}^x g(t)dt\right|+o(1)=\sup_{x\in[a;b]}\left|\int_{x_0}^x(f_n'(t)-g(t))dt\right|+o(1)\le$$
$$\sup_{x\in[a;b]}\left|\int_{x_0}^x|f_n'(t)-g(t)|dt\right|+o(1)\le\sup_{x\in[a;b]}|x-x_0|\sup_{ttrax,\ x_0}|f_n'(t)-g(t)|+o(1)\le(b-a)\sup_{t\in[a;b]}|f_n'(t)-g(t)|+o(1)$$

Sempre per il teorema fondamentale il limite essendo una funzione integrale di g, che è continua in quanto limite uniforme di funzioni continue (le f_n'), ha come derivata l'integranda.

Vale un enunciato più forte la cui dimostrazione richiede un minimo approfondimento delle proprietà della convergenza uniforme e si basa solo sul teorema di Lagrange (piuttosto che sul teorema fondamentale del calcolo e sulla continuità delle derivate):
II criterio Sia $x\mapsto f_n(x)$ una successione di funzioni *semplicemente* differenziabili su $]a;b[$ per cui:

1- $f_n'\to g$ uniformemente sui sottointervalli chiusi di $]a;b[$
2- per un certo $x_0\in]a;b[$ la successioni di numeri $f_n(x_0)$ convergea un certo λ

allora

3- la successione di funzioni f_n converge uniformemente sui sottointervallli chiusi di $]a;b[$
4- la funzione limite è derivabile e ha come limite g.