**Complementi di Analisi Matematica**
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Note per le lezioni undicesima, dodicesima e tredicesima: 28-30 aprile e 5 maggio 2004

## Equazioni di base

**"Quadratura" semplice** Se $f : A \to \mathbf{R}$ è continua su $A$ segmento in $\mathbf{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo la $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t), \quad t \in A \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

**Variabili separabili** Se $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue su $A$ e su $B$, segmenti in $\mathbf{R}$, si tratta di trovare le $y \in C^1(I)$, $I$ segmento incluso in $A$, per cui $\boxed{y'(t) = f(t)g(y(t)),\ t \in I}$

- Se per $\overline{y} \in B$ si ha $g(\overline{y}) = 0$ allora la funzione costante $y(t) = \overline{y}$, $t \in A$ è soluzione.

*Procedimento euristico*
i- si cercano le soluzioni che non si annullano: dall'equazione deve essere $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$
ii- si considera $\Gamma$ primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J \subset B$
iii- si considera $F$ primitiva di $f$
iv- si scelgono $I \subset A$ e $c \in \mathbf{R}$ in modo che $c + F(I) \subset \Gamma(J)$
l'eventuale soluzione deve verificare l'equazione $\Gamma(y(t)) = F(t) + c$, $t \in I$

*Il procedimento inverso* Considerando quindi
i- un generico $]\alpha, \beta[= J \subset B$ in modo che $g$ si annulli solo agli estremi di$J$,
ii-una generica $\Gamma$ primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J$ (essendo $g$ continua non cambia segno e $\Gamma$ sarà invertibile su $J$)
iii-una generica primitiva $F$ di $f$ su $A$
iv- e determinando di conseguenza $I$ e $c$ t.c. $c + F(I) \subseteq \Gamma(J)$, l'intervallo di estremi $\Gamma(\alpha)$ e $\Gamma(\beta)$, si trova che

$$\boxed{y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c),\ t \in I}$$

è una soluzione e inoltre $\alpha < y(t) < \beta,\ t \in I.$

<u>*Problema di Cauchy 1:*</u> Quindi se $g(y_0) \neq 0$ per determinare una soluzione locale al problema di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t)g(y(t)), \quad t \in I \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

- si prende $J$ in modo che $y_0 \in J$ e $g$ non si annulli se non agli estremi di $J$, $\Gamma(p) = \displaystyle\int_{y_0}^{p} \frac{du}{g(u)}$, $p \in J$

- $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$, $I$ per cui $t_0 \in I$ e $F(I) \subset \Gamma(J)$

La funzione $y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c)$ è ben definita ed è soluzione, e tale $y$ è a *valori in* $J$: $\alpha < y(t) < \beta$, per $t \in I$. Si ha l'esistenza locale per tale problema e il fatto che la soluzione è *unica finchè non annulla* $g$.

<u>*Problema di Cauchy 2:*</u> Se $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{\beta-\varepsilon}^{\beta} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ottiene che la soluzione trovata è globale e non può annullare $g$ se non agli estremi di $A$: infatti se fosse $g(y(t_1)) = 0$ si avrebbe $y(t_1)$ eguale ad $\alpha$ o a $\beta$ da cui $\int_{t_0}^{t} f(s)ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{du}{g(u)} = \pm\infty$. Ma $f$ ha integrale finito sugli intervalli limitati e chiusi contenuti in $A$ essendo continua.

<u>*Problema di Cauchy 3:*</u> Analogamente se $y_0$ è uno *zero isolato* di $g$ e $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ha che la funzione costantemente eguale a $y_0$ è *l'unica soluzione* del problema di Cauchy.

**Equazioni lineari del primo ordine** $y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$ con $f$ e $a$ funzioni continue su un intervallo $I$.
*Omogenea* $u'(t) = a(t)u(t)$: se $\alpha' = a$ lo *spazio vettoriale delle soluzioni* è dato da $u(t) = ce^{\alpha(t)}$.
*Soluzioni* Moltiplicando per $e^{-\alpha(t)}$ ci si riduce alla ricerca di primitive di $e^{-\alpha(t)}y(t)$ e le soluzioni sono date

$$\boxed{y(t) = ce^{\alpha(t)} + \int^{t} e^{\alpha(t)-\alpha(s)} f(s)ds = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t}^{s} a(x)dx} f(s)ds}$$

si noti che tutte le soluzioni dell'equazione completa si ottengono da una particolare soluzione (il secondo addendo) sommando una soluzione dell'omogenea.

## Sistemi lineari

**Teorema 1** Siano $t \to a_{i,j}(t)$, $f_i(t)$, $1 \leq i,j \leq n$ funzioni continue su un intervallo $I$, $Y_0 \in \mathbf{R}^n$, $t_0 \in I$. Detta $A(t)$ la matrice $n \times n$ con i dati coefficienti e $F(t)$ l'$n$-pla con le date coordinate $f_i$: il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) + F(t), \quad t \in I \\ \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + \ldots a_{1,n}(t)y_n(t) + f_1(t), \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + \ldots a_{n,n}(t)y_n(t) + f_n(t), \\ y_1(t_0) = Y_{0,1} \\ \vdots \\ y_n(t_0) = Y_{0,n} \end{cases}$$

ha un'unica soluzione globale definita su l'intero $I$.

**Teorema 2** Con le notazioni del precedente teorema

i- Le soluzioni di $U'(t) = A(t)U(t)$ sono uno spazio vettoriale.

ii- Se $t_0 \in I$ e $U^1, \ldots U^n$ sono $n$-soluzioni : $det(U^1(t) \ldots U^n(t)) = det(U^1(t_0) \ldots U^n(t_0))e^{\int_{t_0}^t \mathbf{tr} A(s)ds}$

- per cui lo spazio delle soluzioni ha dimensione $n$

- e tutte le sue basi sono del tipo $U^1, \ldots U^n$ con $U^i$ soluzione di $\begin{cases} U^{i\prime}(t) = A(t)U^i(t) \\ \\ U^i(t_0) = V^i \end{cases}$ e $V = (V^1 \ldots V^n)$ base di $\mathbf{R}^n$

-Il problema di Cauchy per equazioni lineari di ordine $n$ $\begin{cases} \frac{d^n u}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t) + \ldots a_1(t)\frac{du}{dt}(t)_{a0}(t)u(t) = f(t) \\ \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1 \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$

si riduce a un sistema lineare del primo orndine di dimensione $n$ $\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) + F(t) \\ \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

considerando come incognita il vettore $Y(t)$ dell'incognita e delle prime $n-1$ derivate $y^1(t) = y(t), y^2(t) = y'(t) \ldots y^n(t) = y^{n_1\prime}(t) = y^{(n-1)}(t)$, come termine noto $F(t) = (0, \ldots 0, f(t))$, come dato iniziale $Y_0 =(\mathrm{y}_0, \ldots, y_{n-1})$ e come matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

**Approccio generale per risolvere il problema di Cauchy**

1- si determina una base delle soluzioni dell'omogena $(U^1(t) \ldots U^n(t)) = M(t)$: $\quad (detM(t) = detM(t_0)e^{\int_{t_0}^t A(s)ds})$.

2- si trova una soluzione particolare $\overline{U}'(t) = A(t)\overline{U}(t) + F(t)$

3- si cerca $c = (c_1, \ldots c_n) \in \mathbf{R}$ per cui la soluzione dell'equazione data da $c_1U^1(t) + \ldots c_nU^n(t) + \overline{U}(t)$ verifichi le condizioni iniziali del problema, cioè:

$$(U^1(t_0) \ldots U^n(t_0))c = Y_0 - \overline{U}(t_0), \quad c = M(t_0)^{-1}(Y_0 - \overline{U}(t_0))$$

NOTA: si ricorda che $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $i^2 = -1$.

**Il passo 1 nel caso di coefficienti costanti**

**Teorema 3**

i- una base di soluzioni per un'equazione lineare omogena a *coefficienti costanti*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots a_1y' + a_0y = 0, \; a_i \in \mathbf{C}$$

è data dalle funzioni $t^k e^{t\lambda}$, $0 \leq k \leq m_1$ ed $m$ è la molteplicità di $\lambda \in \mathbf{C}$ come radice del polinomio $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots a_1z + a_0$.

ii- se $a_{n-1} \ldots a_0 \in \mathbf{R}$ allora le radici non reali del polinomio sono coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ e una base è data dalle $n$ funzioni $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$, $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ ed $m$ è la comune molteplicità di $\alpha \pm i\beta$ come radice del polinomio. Nel caso $n = 2$ per l'equazione $ay'' + by' + cy = 0$, con coefficienti reali si ha che tutte e sole le soluzioni sono:

$$\begin{cases} c_1e^{t\alpha}\cos\beta t + c_2e^{t\alpha}\sin\beta t & b^2 - 4ac < 0 \\ c_1e^{t\alpha} + c_2te^{t\alpha} & b^2 - 4ac = 0 \\ c_1e^{t\alpha_1} + c_2e^{t\alpha_2} & b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

al variare di $c_1$ e $c_2$ in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero $\alpha_1$, $\alpha_2$ soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$.

**Il passo 2: principali metodi per la determinazione di una soluzione particolare**

*Per tentativi*

*Coefficienti indeterminati per equazioni a coefficienti costanti*

Se il termine noto è del tipo $p(t)e^{\lambda t}$ con $p$ polinomio si cerca una soluzione del tipo:

$$t^m \tilde{q}(t)e^{\lambda t}$$

nel caso reale dei coefficienti dell'equazione, con termine noto $e^{\alpha t}(p_1(t)\cos\beta t + p_2(t)\sin\beta t)$, soluzioni del tipo:

$$t^m e^{t\alpha}(q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t)$$

ove $\tilde{q}$ polinomio con lo stesso grado di $p$, $q_1$ e $q_2$ polinomi con gradi minori del massimo di quelli di $p_1$ e $p_2$, ed $m$ molteplicità di $\lambda$, rispettivamente di $\alpha \pm i\beta$, come radici del polinoomio associato all'equazione.

*Variazione delle costanti* Se $M(t) = (U^1 \dots U^n)$ è una base per lo spazio delle soiluzioni del sistema omogeneo si cerca una soluzione del tipo

$$W(t) = c_1(t)U^1(t) + \dots c_n(t)U^n(t) = M(t)c(t)$$

ovvero una combinazione delle soluzioni ma con coefficienti *funzioni piuttosto che numeri.* Imponendo che una siffatta funzione sia soluzione del sistema si ottiene

$$W' = AW + F \Leftrightarrow M'c + Mc' = AMc + F \Leftrightarrow Mc' = F \Leftrightarrow c' = M^{-1}F$$

ciò è possibile essendo $M$ sempre invertibile. Quindi da $c'$ integrando si trova $c$.

- Nel caso di equazioni se $u_1(t), \dots u_n(t)$ sono generatori dello spazio delle soluzioni dell'omogenea, si cercheranno soluzioni del tipo $c_1(t)u_1(t) + \dots c_n(t)u_n(t)$

- Per equazioni del secondo ordine $n = 2$, ci si riduce al sistema numerico

$$\begin{cases} u_1c_1' + u_2c_2' &= 0 \\ u_1'c_1' + u_2'c_2' &= \frac{f}{a} \end{cases}$$