Complementi di Analisi Matematica
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Appunti della prima lezione: 18 febbraio 2004

Il sistema dei numeri reali $\mathbf{R}$: corpo, ordinato, archimedeo (i numeri naturali non sono superiormente limitati) e completo (i maggioranti di un sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente hanno un minimo), da un modello della retta orientata con un origine e un'unità di misura.

1) $\mathbf{R}^n$: Gli spazi delle coppie, triple, o in generale, dato un numero naturale n, di n-ple ordinate di numeri reali (rispettivamente indicati con $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^n$), danno un modello del piano, dello spazio del "continuo geometrico" n-dimensionale, con un sistema di riferimento privilegiato, e una struttura che permette di valutare gli angoli piani, la distanza tra due punti, i "volumi" etc. con numeri reali.

Struttura Lineare: la scelta di un'origine evidenzia due trasformazioni geometriche base: dilatazioni (di centro l'originee) e traslazioni (identificate con i punti dello spazio) che sono rese algebricamente in $\mathbf{R}^n$ dalle operazioni di prodotto delle componenti per un numero e somma per componenti (distributiva, commutativa ed associativa)

$(x, y) + (a, b) =_{\text{def.}} (x + a, y + b) \ \in \mathbf{R}^2$, $\lambda(a, b) =_{\text{def.}} (\lambda a, \lambda b) \in \mathbf{R}^2$

$(x, y \dots z) + (a, b \dots c) =_{\text{def.}} (x + a, y + b \dots z + c)$, $\lambda(a, b \dots c) =_{\text{def.}} (\lambda a, \lambda b \dots \lambda c) \in \mathbf{R}^n$

Per questo motivo gli elementi di $\mathbf{R}^n$ verranno chiamati sia *punti* che *vettori*. I vettori che individuano le "direzioni coordinate" $(1, 0 \dots, \ 0), \dots (0, \dots, \ 1)$ sono rispettivamente denotati con $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$.

Coordinate lineari La convenzione di disegnare gli assi coordinati del piano cartesiano tra loro perpendicolari non è rilevante rispetto alla sola struttura lineare. Per esempio e si considerano P e Q *non allineati* con l'origine ogni punto del piano (x, y) si potrà scrivere come $sP + tQ$ (*regola del parallelogramma*) e (s, t) danno le coordinate del punto rispetto al nuovo sistema di riferimento dato da P e Q e si riottiene $\mathbf{R}^2$.

Struttura metrica: La sola struttura lineare permette di formalizzare e quindi dimostrare il teorema di Talete. Ma non permette di confrontare distanze in direzioni diverse. Ispirandosi al "teorema di Pitagora" si definisce la *distanza euclidea*:

$d_n((x, y \dots z), (a, b \dots c)) =_{\text{d}} \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 \dots (z - c)^2}$

Proprietà astratta

$$\boxed{\begin{array}{l} d(P, Q) \geq 0, \ d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \\[1ex] d(P, Q) = d(Q, P), \text{ simmetria} \\[1ex] d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q), \text{ diseguaglianza triangolare} \end{array}}$$

NOTA: Tale nozione permette di definire a livello elementare ed intuitivo la *lunghezza* di un cammino.

Compatibilità tra le due strutture: *norma euclidea.* Poichè questa distanza euclidea è "invariante per translazioni e per omotetie" ovvero per le operazioni dela struttura lineare

$$\boxed{\begin{array}{l} d(P, Q) = d(P + R, Q + R) \\[1ex] d(\lambda P, \lambda Q) = |\lambda| d(P, Q), \end{array}}$$

conviene mettere in evidenza la funzione che misura la distanza dall'origine $|(a, b \dots c)|_n =_{\text{d}} \sqrt{a^2 + b^2 \dots c^2} = dist_n((0, 0 \dots 0), (a, b \dots c))$ che si chiamerà *norma euclidea.* Le proprietà che isolano il concetto astratto sono

$$\boxed{\begin{array}{l} |P| \geq 0, \ |P| = 0 \Leftrightarrow P = O \\[1ex] |\lambda P| = |\lambda||P|, \\[1ex] |P + Q| \leq |P| + |Q|, \text{ diseguaglianza triangolare} \end{array}}$$

Viceversa $d(P, Q) = |P - Q|$.

• NOTA: Tali nozioni permettono di definire in modo elementare la derivata di una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^n$ e quindi di formalizzare la nozione di *approssimazione lineare* di una curva in un suo punto e valutare con gli strumenti del calcolo le lunghezze dei cammini.

Area di figure piane secondo Peano-Jordan

Le coordinate cartesiane e la completezza di $\mathbf{R}$ permetteno di dare una prima nozione di area di una figura piana. Come si vedrà tale nozione si riconduce agli strumenti del calcolo per funzioni di una variabile. Dato un rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati considerando lo con tutti i suoi lati $R = [a; \alpha] \times [b; \beta] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq \alpha b \leq y \leq \beta\}$, o meno $[a; \alpha) \times [b; \beta]$, $[a; \alpha) \times [b; \beta) \ldots (a; \alpha) \times (b; \beta)$ si definisce la sua misura elementare $me(R) = (\alpha - a)(\beta - b)$.

Definizione se $A \subset \mathbf{R}^2$ non vuoto e *limitato* la *misura* (bidimensionale) *secondo Peano-Jordan* di A è data dal comune valore dei seguenti numeri quando essi coincidano:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} me(R)$: al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli disgiunti contenuti in A (approssimazione interna)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} me(R)$: al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli disgiunti con unione contenente A (approssimazione esterna)

Nel caso si denota con $m(A)$. Si pone inoltre $m(\emptyset) = 0$.

In modo del tutto analogo si definisce quando un sottoinsieme non vuoto e *limitato* di $\mathbf{R}^n$ ha n-volume secondo Peano-Jordan, È immediato provare le seguenti proprietà se A e B hanno misura:

$$\boxed{\begin{array}{c} m(R) = me(R) \text{ se } R \text{ è rettangolo cartesiano} \\[1em] m(A \cup B) = m(A) + m(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset \end{array}}$$

NOTA: Questo procedimento è una minima generalizzazione dell'integrale di Riemann per funzioni di una variabile che modella la misura bidimensionale dei sottografici di funzioni non negative. Se una funzione non negativa è Riemann integrabile è immediato dedurre (le somme superiori ed inferiori sono somme delle misure elementari di particolari famiglie di rettangoli) che il suo sottografico ha misura di Peano-Jordan e che questa coincide conl'integrale della funzione. Da un minimo da pensare in più la dimostrazione del "viceversa": se il sottografico di una funzione non negativa ha misura di Peano-Jordan allora la funzione è Riemann integrabile e il suo integrale è proprio la misura in questione.

Struttura "pre-Hilbertiana": *prodotto scalare* euclideo

$((x, y), (a, b)) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mapsto \langle (x, y), (a, b) \rangle_2 =_{\mathrm{d}} xa + yb \in \mathbf{R}$

$\langle (x, y \ldots z), (a, b \ldots c) \rangle_n =_{\mathrm{d}} xa + yb \ldots zc \in \mathbf{R}$

Le proprietà astratte dal prodotto scalare euclideo sono

$$\boxed{\begin{array}{c} \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle \text{ Simmetria} \\[1em] \langle \lambda P + R, Q \rangle = \lambda \langle P, Q \rangle + \langle R, Q \rangle \text{ Bilinearità} \\[1em] \langle P, P \rangle \geq 0, \ \langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow P = O \text{ Positività} \end{array}}$$

Da queste è immediato provare la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz: $\boxed{|\langle P, Q \rangle| \leq |P|_n |Q|_n}$

Il trinomio di secondo grado in t: $\langle tP{+}Q, tP{+}Q \rangle$, essendo positivo, ha discriminante nonpositivo e si ottiene il quadrato della diseguaglianza in questione. La seguente relazione con il coseno permette di dedurre la diseguaglianza in modo ancor più immediato.

Se θ è la misura in radianti dell'angolo convesso formato dalle semirette OP, OQ si ha $\boxed{\cos \theta = \frac{\langle P, Q \rangle}{|P||Q|}}$

La misura in radianti di un angolo viene definita come il doppio dell'area del settore di cerchio unitario determinato dall'angolo.

Se la struttura lineare permette solo di valutare l'allineamento, la norma di avere un "compasso" con cui riportare un'unità di misura nelle diverse direzioni rispettando la diseguaglianza triangolare, quella pre-hilbertiana corrisponde ad avere un "goniometro".

Coordinate cartesiane Una n-pla di elementi di $\mathbf{R}^n$ con prodotto scalare nullo e lunghezza unitaria individua un sistema di coordinate che viene detto cartesiano o *ortonormale* (rispetto al prodotto scalare standard).

Compatibilità con la norma. Vale l' *identità del parallelogramma*: $\boxed{4 \langle P, Q \rangle = |P + Q|^2 - |P - Q|^2}$

2) Funzioni di più variabili e funzioni a valori "vettoriali".

Una funzione $f : D \mapsto \mathbf{R}^n$ è identificata da n funzioni ordinate $f_1 : D \mapsto \mathbf{R}^n \dots f_n : D \mapsto \mathbf{R}^n$ che si chiameranno sue componenti (cartesiane): $f(d) = (f_1(d), \dots, f_n(d))$.

Funzioni lineari La struttura lineare permette di identificare i punti con le "traslazioni" che agiscono sugli stessi, e le "dilatazioni" di centro l'origine (chiamate omotetie) con la moltiplicazione per un numero reale.

Rette in forma "parametrica": si da facilmente un modello di retta nello spazio: dati P e Q si dirà *retta paralella a P passante per Q* tutta l'immagine della funzione di una variabile reale $\lambda \in \mathbf{R} \mapsto Q + \lambda P$.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA LINEARE: Le trasformazioni che commutano con le omotetie e distributive rispetto la somma $T(P + \lambda Q) = T(P) + \lambda T(Q)$ sono tutte e sole quelle che trasformano rette parallele in rette parallele e lasciano fissa l'origine.

Definizione Tali funzioni si dicono *lineari.* Composte con traslazioni si dicono *affini.*

Forme lineari Una lineare $\omega : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ si dice 1-*forma* $\omega(x + \lambda a, \dots y + \lambda b) = \omega(x, \dots y) + \lambda\omega(a, \dots b)$. La famiglia delle forme lineari ha la struttura lineare "ereditata" da quella di $\mathbf{R}$. È detto spazio *duale*: $\mathbf{R}^{n*}$.

La scelta di un sistema di coordinate in $\mathbf{R}^n$: $v^1, \dots v^n$ permette di scegliere una *base* nel duale $v^{1*}, \dots v^{n*}$: $v^{i*}(v^j) = \delta_{ij}$. Se $\varphi \in \mathbf{R}^{n*}$ si ha infatti $\varphi = \sum_i \varphi(v^i)v^{i*}$. Rimane una forte differenza concettuale: *e.g.* in fisica intuitivamente uno spostamento, una velocità saranno vettori. Una forza un impulso saranno forme.

In particolare *prodotto scalare* dato dal sistema di coordinate cartesiane su $\mathbf{R}^n$ permette di identificare con $\mathbf{R}^n$ il suo duale. In $\mathbf{R}^2$ si ha:

$$\boxed{\begin{gathered} \omega \mapsto (\omega(1,0), \omega(0,1)) =_{def} R(\omega) \\ (x, y) = x(1,0) + y(0,1) \\ \omega(x, y) = \langle R(\omega), (x, y)\rangle = x\omega(1,0) + y\omega(0,1) \end{gathered}}$$

Quindi *ogni* funzione lineare di n variabili reali a valori reali è del tipo $f(x, y \dots, \ z) = ax + by + \dots + cz$

Trasposta. Se $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ è lineare l'associazione $\varphi \mapsto \varphi \circ L$ definisce una funzione lineare ${}^tL : \mathbf{R}^{m*} \to \mathbf{R}^{n*}$ detta *trasposta.*

Matrici. Considerando che una funzione lineare L da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ è data da m forme lineari $L_1, \dots L_m$, si ha

$$\boxed{\begin{gathered} a_{ij} =_{\mathrm{d}} L_i\mathbf{e}_j, \ (x_1, x_2 \dots, \ x_n) = x_1\mathbf{e}_{1,\mathbf{R}^n} + \dots x_n\mathbf{e}_n \\ L(x_1, x_2 \dots, \ x_n) = L_1(x_1, x_2 \dots, \ x_n)\mathbf{e}_{1,\mathbf{R}^m} + \dots L_m(x_1, x_2 \dots, \ x_n)\mathbf{e}_m \\ = x_1L(\mathbf{e}_1) + \dots x_nL(\mathbf{e}_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, \ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \end{gathered}}$$

Conviene considerare le forme come n-ple disposte orizzontalmente (righe) e i vettori come n-ple disposte verticalmente (colonne). Quindi la forma $(x, y) \mapsto x + 2y$, data dal prodotto scalare per $(1, 2)$, può essere denotata con ${}^{(1,2)}\binom{x}{y}$. Una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ può essere considerata come una "colonna " di m righe, ognuna con n componenti, che trasforma colonne di $\mathbf{R}^n$ in colonne di $\mathbf{R}^m$. La tabella che si ottiene con m righe ed n colonne si dice matrice di dimensione $n \times m$. Si indica per primo l'indice di riga. Se $v_c \in \mathbf{R}^n$ è inteso come colonna sarà bene denotare la sua i-esima componente con v_{ic}. Scambiando righe con colonne si ottiene la matrice *trasposta.* Essa corrisponde alla funzione lineare trasposta una volta che si siano identificati i duali con gli spazi dei vettori.

Prodotto righe per colonne La composizione di funzioni lineari si riduce quindi al calcolo del prodotto scalare "righe per colonne" delle matrici corrispondenti. Si noti che ${}^t(AB) =^t B^tA$.

NOTA: ISOMETRIE le trasformazioni che lasciano l'origine fissa e che conservano la distanza, sono particolari trasformazioni lineari, e quindi per l'identità del parallelogramma, conservano anche il prodotto scalare. Dunque devono trasformare il sistema di coordinate canonico in un altro ortonormale, per cui le loro colonne saranno ortonormali: $A^{-1} =^t A$.

Cambiamenti di coordinate lineari Ogni cambiamento di coordinate lineari in $\mathbf{R}^n$ da origine a una funzione lineare invertibile da $\mathbf{R}^n$ in se. A sua volta ogni trasformazione lineare L da $\mathbf{R}^n$ in se biunivoca può essere interpretata come cambiamento di coordinate lineare: l'n-pla $L(x, y \dots z)$ rappresenterà le coordinate del punto (individuato nel sistema di riferimento cartesiano dalle coordinate $(x, y \dots z)$) nel sistema di coordinate dato dagli n vettori $\mathbf{v} \dots \mathbf{w}$ che vengono trasformati da L rispettivamente in $\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2 \dots, \ \mathbf{e}_n$.

Se $(x,\dots z) = x'\mathbf{v} + \dots z'\mathbf{w}$ (ha coordinate $x' \dots z'$ in a tale sistema) si ha $L(x,\dots z) = L(x'\mathbf{v} + \dots z'\mathbf{w}) = x'L\mathbf{v} + \dots z'L\mathbf{w} = x'\mathbf{e}_1 + \dots z'\mathbf{e}_n = (x' \dots z')$

Cambiamenti di coordinate generali Tipico esempio sono le *coordinate polari* in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ date dalle funzioni coordinate $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta(x, y) \in [0; 2\pi[$ che da "l'angolo in senso antiorario" della direzione di (x, y) rispetto al semiasse orizzontale positivo. In particolare $\theta(x, y) = \mathrm{artan}\frac{x}{y}$ se $x \geq 0$ e $y > 0$.

3) Sottoinsiemi.

Forma parametrica: Si descrive un sottinsieme di $\bar{R}^n$ in forma parametrica quando lo si vede come immagine di una funzione $f: P \to \mathbf{R}^n$. Tale funzione si dice parametrizzazione dell'insieme.

- Le funzioni $t \mapsto (t, t+1)$ e $t \mapsto (t^3 \sin t, t^3 \sin t + 2)$ hanno la stessa immagine: la retta passante per $(0,1)$ e parallela a $(1,1)$. Ma la seconda parametrizzazione descrive anche che tale retta viene "percorsa" andando vanti ed indietro con oscillazioni sempre maggiori e maggior velocità.
- Analogamente $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\theta \mapsto (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ hanno come immagine lo stesso sottoinsieme: la circonferenza di raggio unitario e centro l'origine. Ma la seconda funzione descrive che tale circonferenza è percorsa due volte.
- Come le rette così si danno le nozioni di *piano*, *sottospazio affine* k-dimensionale in $\mathbf{R}^n$ mediante funzioni affini da $\mathbf{R}^k$ in $\mathbf{R}^n$ iniettive. Per esempio il piano in $\mathbf{R}^3$ passante per $(1,2,3)$ e parallelo alle direzioni $(1,1,1)$, $(4,4,5)$ è descritto da $(s,t,) \mapsto s(1,1,1) + t(4,4,5) + (1,2,3)$.

-**Segmenti e parallelepipedi.** La funzione $t \in [0;1] \mapsto t\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{w}$ descrive in modo affine il *segmento* tra i punti $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ "orientato" da $\mathbf{w}$ a $\mathbf{v}$. Similmente la funzione $(s.t) \in [0;1] \times [0;1] s\mathbf{v} + t\mathbf{w} + P$ ha come immagine il "parallelogramma" di vertici Q, $Q + \mathbf{v}$, $Q + \mathbf{w}$, $Q + \mathbf{v} + \mathbf{w}$. In modo del tutto analogo si descrive come immagine della restrizione di una funzione affine un parallelepipedo di dimensione k in $\mathbf{R}^n$: $(t_1, \dots t_k) \mapsto t_1\mathbf{v}_1 + \dots t_k\mathbf{v}_k + Q$, ovvero l'insieme $(\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)[0;1]^k + Q$.

Forma implicita. - Il luogo di zeri della funzione $x + y + 1$ è una retta nel piano. In più variabili il luogo di zeri di una forma su $\mathbf{R}^n$, $(x, y \dots z) \mapsto ax + by \dots cz$, è un sottospazio di dimensione $n-1$: è il sottopsazio passante per l'origine ed ortogonale alla direzione $(a, b, \dots c)$. Un sottospazio di dimensione $n-1$ in $\mathbf{R}^n$ sarà descritto dal luogo di zeri di una funzione del tipo $ax + by \dots cz - d$ e sarà l'iperpiano ortogonale alla direzione di $v = (a, b, \dots c)$ e passante per un qualsiasi vettore $w = (\alpha, \beta, \dots \gamma)$ per cui $\langle v, w \rangle = d$.

- Se L è lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ il suo luogo di zeri è un sottospazio lineare di $\mathbf{R}^n$, indicato da $KerL$ e detto anche *nucleo*, e la sua immagine un sottospazio lineare di $\mathbf{R}^m$. Vale la formula

$$\boxed{\dim KerL + \dim ImL = n}$$

Il traslato di un sottospazio di dimensione k in $\mathbf{R}^n$ può essere quindi descritto dalle soluzioni di un sistema di equazioni del tipo $L(v) = w \in \mathbf{R}^m$. Quello che comunemente si dice risoluzione di un sistema di m equazioni in n incognite corrisponde a descrivere in modo parametrico (ovvero come immagine) un sottoinsieme che è dato come luogo di zeri. Per esempio il sistema $x + y + z = 1$, $2x - y + z = 2$, che descrive l'intresezioni di due piani nello spazio, ha come soluzione la retta parametrica $x \mapsto x(1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) + (0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

- In $\mathbf{R}^3$ i principali luoghi di zeri di polinomi di secondo grado nelle tre variabili ${}^{(x,y,z)}M^t(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + \dots = 0$ sono riconducibili mediante un cambiamento di coordinate affine ai seguenti: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, la sfera di centro l'origine e di raggio unitario, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ un punto, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, il doppio cono di vertice l'origine e pendenza $\frac{\pi}{4}$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, l'iperboloide ad una falda ottenuto ruotando l'iperbole $x^2 - z^2 = 1$ "attorno all'asse delle z", $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, l'iperboloide a due falde ottenuto ruotando l'iperbole $x^2 - z^2 = -1$, $x^2 + y^2 - z = 0$, il paraboloide ottenuto dal grafico $z = x^2$ per rotazione " attorno all'asse delle z", $x^2 - y^2 - z = 0$, il paraboloide iperbolico a "sella", $x^2 + y^2 = 1$ il cilindro a base la circonferenza, $x^2 - y^2 = 1$ il cilindro a base l'iperbole, $y = x^2$ il cilindro a base la parabola, $x^2 = 1$ due piani paralleli, $x^2 + y^2 = 0$ una retta, $x^2 - y^2 = 0$ due piani incidenti, $x^2 = 0$ un piano "doppio".

- La palla di raggio r e centro (a,b,c) nello spazio è data dall'equazione $d((x,y,z),(a,b,c)) = r$ cioè $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$. Il quadrato di centro l'origine e lati paralleli agli assi coordinati di lunghezza 2 nel piano è descritto dalla diseguaglianza $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$. Nello spazio la diseguaglianza $\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1$ descrive un cubo con spigoli paralleli agli assi. La condizione $|x| + |y| \leq 1$ descrive nel piano il quadrato con lati paralleli alle bisettrici e lunghezza $\sqrt{2}$.

Un "semispazio" è descritto dalle soluzioni di una diseguaglianza del tipo $ax + by + \dots cz \leq d$.

- L'insieme ottenuto ruotando attorno all'asse z un luogo di zeri del tipo $f(x,z) = 0$ nel semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ è descritto dal luogo di zeri $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. Per esempio l'equazione $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$ descrive la superficie di una "ciambella" (*toro*).

Convessi. Un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^n$ si dice *convesso* se contiene tutti i segmenti con estremi suoi punti, cioè:

$$\boxed{\text{se } P,\ Q \in C \text{ e } t \in [0;1] \text{ allora } tP + (1-t)Q \in C}$$

I sottospazi affini e i semispazi sono convessi. Le immagini di funzioni lineari ristrette a convessi sono a loro volta insiemi convessi. Intersezione di convessi è convessa. Lo sviluppo di tale concetto si basa sul seguente: TEOREMA: Un sottoinsieme convesso è l'intersezione dei semispazi che lo contengono.

4) Determinante e minori

Orientazione. A livello intuitivo due coppie ordinate di vettori nel piano si dicono avere la stessa orientazione se i secondi spazzano l'angolo convesso verso i primi nello "stesso senso". In $\mathbf{R}^2$ di dirà che una coppia ordinata di vettori v, w (non nulli e non paralleli) ha orientazione positiva se ha la stessa orientazione della coppia dei vettori coordinati $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, negativa altrimenti. Scriveremo $O(v, w) = 1$ rispettivamente $O(v, w) = -1$. Se i due vettori sono paralleli o nulli si pone $O(v, w) = 0$. Chiaramente $O(v, w) = -O(w, v)$.

Area orientata. Data una coppia ordinata di vettori nel piano v e w si considera il parallelogramma $P = P(O, v, w)$ di vertici O, v, w, $v + w$ da essi generato. Intuitivamente si definisce la seguente funzione $d(v, w) = O(v, w)Area(P)$. Le proprietà che si deducono dalle definizioni e dalla geometria elementare sono

$$d(v, w) = -d(w, v) \text{ (alternante)}, \; d(v + tu, w) = d(v, w) + td(u, w) \text{ (bilineare)}$$

La seconda proprietà si deduce da: $d(tu,w)=td(u,w)$ (variando una dimensione l'area varia dello stesso fattore), $d(v+tw,w)=d(v,w)$ (parallegrammi con stessa base ed altezza hanno stessa area), ogni u si scrive come $sv+\sigma w$ (a parte i casi "degeneri").

Analoghe considerazioni intuitive si fanno per k vettori in $\mathbf{R}^n$. L eproprietà astratte da tali osservazioni qualitative sono le seguenti:

Forme k-lineari alternanti. Una funzione reale di k vettori di $\mathbf{R}^n$, $\Lambda : \mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ si dice:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{alternante se } \Lambda(\ldots v, \ldots w \ldots) = -\Lambda(\ldots w, \ldots v \ldots) \\[2ex] k\text{-lineare se } \quad \Lambda(\ldots v + tu, \ldots) = \Lambda(\ldots v, \ldots) + t\Lambda(\ldots u \ldots) \end{array}}$$

- Direttamente dalla definizione segue che se uno degli argomenti sta nello spazio generato dai rimanenti $k - 1$ allora Λ si annulla. In particolare se $k > n$ l'unica k-forma alternante in $\mathbf{R}^n$ è quella nulla.
- Le funzioni k-lineari su $\mathbf{R}$ sono solo un coefficiente per il prodotto delle k variabili: $(x_1, \ldots x_k) \mapsto \alpha x_1 \ldots x_k$.
- Già se $(v_1, \ldots v_k) \mapsto \Lambda(v_1, \ldots v_k)$ è solo k-lineare su $\mathbf{R}^n$ poichè $v_j = \sum_{1 \le i \le n} v_{ij}\mathbf{e}_i$ si ottiene un particolare tipo di polinomio omogeneo di grado k nelle variabili date dalle componenti dei vettori:

$$\Lambda(v_1, \ldots v_k) = \sum_{1 \le i \le n} v_{i1}\Lambda(\mathbf{e}_i, v_2, \ldots v_k) = \ldots = \sum_{1 \le i_1 \le n, \ldots 1 \le i_k \le n} v_{i_1 1} \ldots v_{i_k k}\Lambda(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots \mathbf{e}_{i_k})$$

- Se Λ è anche alternante gli indici $i_1, \ldots i_k$ dovranno esser tutti diversi. Nel caso $k = n$ ci si riduce a

$$\sum_{\sigma : n \leftrightarrow n} v_{\sigma_1 1} \ldots v_{\sigma_n n}\Lambda(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \ldots \mathbf{e}_{\sigma_n})$$

Se n_σ è il numero di scambi per riordinare in modo crescente $(\sigma_1, \ldots \sigma_n)$, per cui $\varepsilon_\sigma = (-1)^{n_\sigma}$ è il segno di $\prod_{a<b}(\sigma_b - \sigma_a)$

$$\boxed{\Lambda(v_1, \ldots v_n) = \Lambda(\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma : n \leftrightarrow n} \varepsilon_\sigma v_{\sigma_1 1} \ldots v_{\sigma_n n}}$$

TEOREMA: Vi è un'unica forma n-lineare alternante in $\mathbf{R}^n$ per cui $\Lambda(\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n) = 1$.

Definizione. Tale n-forma si dirà funzione *determinante*. Si dirà determinante $n \times n$ di una matrice il determinante degli n vettori dati dalle sue colonne. Nel caso di $\mathbf{R}^2$ si ha $det\binom{a \; b}{c \; d} = ad - bc$.

Dall'unicità del segue direttamente che
- il determinante di un prodotto di matrici quadrate è il prodotto dei determinanti;
- se il determinante è nullo le n colonne non possono generare tutto $\mathbf{R}^n$: altrimenti la matrice avrebbe un'inversa e il prodotto dei due determinanti dovrebbe essere 1.

Dall'espressione del determinante ricavata si ha direttamente che il determinante di una matrice è eguale a quello della sua trasposta. Quindi che è lineare sia per colonne che per righe.

Dati P, $Q \in \mathbf{R}^2$ considerandoli scritti in colonna, se θ è la misura in radianti dell'angolo convesso *"che va"* dalla semiretta OP alla OQ si ha dalla relazione tra coseno e prodotto scalare $\boxed{\sin\theta = \frac{det(P,Q)}{|P||Q|}}$

La nozione algebrica di determinante rende preciso il concetto di orientazione e si prova che la sua interpretazione intuitiva come volume di un parellelepipedo è consistente con la nozione di misura di Peano-Jordan:

Definizione: Due n-vettori si dicono avere la stessa orientazione se il determinante del prodotto delle due matrici che ripsettivamente le hanno come colonne è positivo.

TEOREMA: $\boxed{m(M[0; 1]^n) = |detM|}$

NOTA: Considerando solo la struttura lineare ed ignorando le coordinate cartesiane è più corretto parlare di determinante di una trasformazione lineare dello spazio in se. Nel caso il determinante intuitivamente rappresenta il "rapporto tra volumi orientati" dei due parallelepipedi genarati rispettivamente da n vettori ordinati e dai loro trasformati: pur non non avendo la definizione di volume del singolo parallelepipedo.

Minori La struttura pre-hilbertiana permette di dare un'interpretazione geometrica elementare non solo del determinante ma dei determinanti dei minori di ordine massimo.

- Da quanto osservato in margine alla definizione una k-forma in $\mathbf{R}^n$ è del tipo

$$\Lambda(v_1,\dots v_k) = \sum_{1\le i_1<i_2\dots<i_k\le n} \Lambda(\mathbf{e}_{i_1},\dots \mathbf{e}_{i_k}) \sum_{\sigma:k\leftrightarrow k} \varepsilon_\sigma v_{i_{\sigma_1}1}\dots v_{i_{\sigma_k}k} = \sum_{1\le i_1<i_2\dots<i_k\le n} \Lambda(\mathbf{e}_{i_1},\dots \mathbf{e}_{i_k}) det(v_{i_\mu\nu})_{\substack{1\le\mu\le k\\1\le\nu\le k}}$$

Cioè ogni k-forma in $\mathbf{R}^n$ è combinazione lineare dei determinanti delle sottomatrici $k\times k$.
Il determinante di una sottomatrice k ottenuta scegliendo k righe di indici $i_1<\dots<i_k$, rappresenta il volume orientato del k-parallelepipedo ottenuto proiettando il parallelepipedo generato dai $v_1,\dots v_k$ sul k-spazio coordinato generato da $\mathbf{e}_{i_1}\dots\mathbf{e}_{i_k}$.
- Dati k vettori in $\mathbf{R}^n$ se si considera un sistema di coordinate ortonormali nel k-spazio da essi generato
Dati 2 elementi $P,\ Q\in\mathbf{R}^3$ vale la seguente identità algebrica:

$$\boxed{\left(det\begin{pmatrix}P_1Q_1\\P_2Q_2\end{pmatrix}\right)^2+\left(det\begin{pmatrix}P_1Q_1\\P_3Q_3\end{pmatrix}\right)^2+\left(det\begin{pmatrix}P_2Q_2\\P_3Q_3\end{pmatrix}\right)^2 = det^t(P,Q)(P,Q)}$$

Analogamente per $k\le n$ elementi di $\mathbf{R}^n$, considerando la matrice M di dimensioni $n\times k$ che li ha come colonne:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine } k\\ \| \\ \text{determinante della matrice } {}^tMM \text{ di dimensione } k\times k\end{array}}$$

In effetti $X\mapsto det({}^tMX)$ definita per le matrici $n\times k$, è k-lineare ed alternante. Quindi è $\sum det({}^tM(\mathbf{e}_{i_1}\dots\mathbf{e}_{i_k}))det(X_{i_\mu\nu})$ cioè $\sum det(M_{i_\mu\nu})det(X_{i_\mu\nu})$. Sostituendo M a X si ottiene quanto desiderato.

Interpretazione geometrica
- Da una parte il determinante di una sottomatrice k ottenuta scegliendo k righe di indici $i_1<\dots<i_k$, rappresenta il volume orientato del k-parallelepipedo ottenuto proiettando il parallelepipedo generato dai $v_1,\dots v_k$ sul k-spazio coordinato generato da $\mathbf{e}_{i_1}\dots\mathbf{e}_{i_k}$.
- Dall'altra: si considera un sistema di coordinate cartesiano in $\mathbf{R}^n$, che dia una matrice C per cui $C^{-1}={}^tC$ e $detC=1$, con i primi k elementi nel sottospazio generato dalle colonne di M in modo che le nuove coordinate di M saranno CM ed avranno le ultime $n-k$ componenti nulle. Quindi $det^tMM=det^tM^tCCM=det^t(CM)CM$ e quest'ultimo non è che il quadrato del determinante delle coordinate di M nel suo sottospazio: quindi rappresenta il quadrato della misura di Peano-Jordan in tale sottospazio.
- Le precedenti formule possono essere così interpretate: dato un k-parellelepipedo P in $\mathbf{R}^n$, e le sue proiezioni ortogonali $P_{i_1<\dots<i_k}$ sui k-spazi coordinati generati da $\mathbf{e}_{i_1}\dots\mathbf{e}_{i_k}$, si ha la seguente identità che generalizza il teorema di Pitagora:

$$\boxed{\sqrt{\sum_{i_1<\dots<i_k} m(P_{i_1\dots i_k})^2} = m(P)}$$

Courant-John Vol.2 Cap. 1.2, complementi e riassunto Cap. 2, Cap. 4.1, Cap. 4.App. 1

Fusco-Marcellini-Sbordone Cap. 2.13-14-15-16-17.