Complementi di Analisi Matematica
Anno Accademico 2003-2004
Laurea specialistica in Informatica
V.M. Tortorelli

VI foglio di esercizi

Nota: alcuni dei seguenti esecizi sono tratti da "A problem book in Mathematical Analysis" di G.N.Berman, M.I.R. 1977. Altri testi da cui attingere esercizi sono per esempio:

A.Faedo, L.Modica, C.R.Grisanti: Analisi I Esercizi; J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia: Esercizi e problemi di Analisi matematica; F.Conti: Calcolo; F.Conti, P.Acquistapace, A.Savojni: Analisi Matematica; R.Courant, F.John: Calculus and Analysis voll. 1-2; M.Giaquinta, G.Modica Analisi Matematica voll.1-2-3 etc. etc. .

ESERCIZIO n. 1 Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

$$u'+2u=4x,\ u'+u=\cos x,\ u'+au=e^{mx},\ u'-u\sin x=\sin 2x\ ,\quad u'+2xu=xe^{-x^2},$$

$$u'+\frac{1-2x}{x^2}u=1\ (x>0)\ ,\quad u'-u=\frac{(1+x^2)e^x}{x}\ (x<0)\ ,\quad u'-\frac{2xu}{1+x^2}=1+x^2\ ,$$

$$u'+\frac{2}{x}u=\frac{\sin x}{x}\ (x\neq 0)\ ,\quad u'+\frac{nu}{x+1}=e^x(x+1)^n\ (n\in\mathbf{N}),$$

$$xu'=1\ ,\quad xu'+2u=\sin x\ ,\quad x(u'-u)=(1+x^2)e^x\ ,\quad (x+1)u'-nu=e^x(x+1)^{n+1}.$$

ESERCIZIO n. 2 L'equazione differenziale $u'=f(x,u)$ è equivalente a dire che si cerca un cammino che sia un grafico $x\mapsto(x,u(x))$ lungo il quale si annulla la forma differenziale

$$-f(x,p)dx+dp.$$

La funzione inversa dovrebbe verificare l'equazione $x'=\frac{1}{f(x,u)}$. Tracciare i grafici approssimativi delle soluzioni dei seguenti problemi riducendosi ad equazioni lineari:

$$u'=\frac{1}{2x-u}\ ,\quad u(1)=1\ ;\quad u'=\frac{1}{2x-u^2}\ ,\ u(1)=-1\ ;\quad u'=\frac{1}{x+e^u}\ ,\quad u(0)=3\ ;$$

ESERCIZIO n. 3

a) Un massa puntiforme di grandezza m, in quiete all'istante iniziale t_0, si muove di moto rettilineo soggetta ad una forza proporzionale, per un fattore κ, all'incremento di tempo dall'istante iniziale, ed ad una forza di resistenza del mezzo porporzionale, per un fattore χ, alla velocità. Si espliciti la velocità in funzione del tempo e dei parametri.

b) Un corpo ad un instante t_0 ha temperatura pari a quella dell'ambiente circostante eguale a Θ_0. Il corpo viene riscaldato a tasso costante, pari a δ^2, e disperde calore nell'ambiente in modo proporzionale, per un fattore γ^2, alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente considerata costante. Si espliciti la dipendenza dal tempo della temperatura del corpo.

ESERCIZIO n. 4 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$u' = \frac{1-2x}{y^2}\ ,\quad xu' + u = u^2 \quad (x > 0)\ ,\quad u' + \sqrt{\frac{1-u^2}{1-x^2}} = 0\ ,\quad u' = \frac{1+y^2}{1+x^2}\ ,\quad u' = 100^{x+u}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali per *sostituzione*:

$$u' = 3 + \cos(x-u)\ ,\quad u' = \frac{u+x-1}{(x+u)^2+1}\ ,\quad u' = \frac{6x + \frac{u}{x}}{2 - \log x}\ ,\quad u' = -\frac{e^x \cos u + 3u}{3x - e^x \sin u}.$$

ESERCIZIO n. 6 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali "omogenee":

$$u' = \frac{ux}{x^2+2u^2},\quad u' = e^{\frac{u}{x}} + \frac{u}{x},\quad xu' = u(\log u - \log x),\quad (3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy\ ,$$

$$u' = \frac{(1+u)^2}{xu + x - x^2}.$$

ESERCIZIO n. 7 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali di Bernoulli:

$$u' = 1 + 3u + u^2\ ,\quad u' = xu + \sqrt{u}\cos x\ ,\quad u' = u\tan x - u^2 \cos x\ ,\quad u' = u - u^2\cos x\ ,$$

$$u^{n-1}(\alpha \cdot u' + u) = x \ (n \in \mathbf{N},\ \alpha \in \mathbf{R}).$$

ESERCIZIO n. 8 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali riducendosi ad un'equazione omogenea o lineare per sostituzione e cambiamento di variabili:

$$u' = 2\frac{(u+2)^2}{(x+u-1)^2}\ ,\quad u' = \frac{2u-x-5}{2x-u+4}\ ,\quad u' = \frac{x+u-2}{u-x-4}\ ,\quad u' = \frac{u^2-x}{2u(x+1)}\ ,$$

$$u' = \frac{u^3}{2(xu^2 - x^2)}$$

(*) ESERCIZIO n.9 Trovare almeno un grafico per cui la distanza dall'origine di ogni retta tangente ad un suo punto è uguale alla distanza dall'origine della retta normale nello stesso punto.

ESERCIZIO n. 10 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

$$u'' = x + \sin x,\ u'' = \mathrm{artan} x,\ u'' = u' + x,\ u'' = \frac{u'}{x} + x,\ (u'')^2 = u',\ 2xu'u'' = (u')^2 + 1,$$

$$u'' = u,\ u'' = u^{13},\ u'' = 2uu',\ u''u + (u')^2 = x,\ u'' + \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = 0,\ u'' + u',\ u'' = \frac{u'(e^u - 1)}{x},$$

$$u'' = \frac{u}{1+(u')^2}.$$

ESERCIZIO n. 11 Si trovino le soluzioni dei seguenti problemi ai dati iniziali:

$$u'' = \frac{2xu'}{1+x^2},\ u(0) = 1,\ u'(0) = 3;\ u'' = \frac{u'}{x} + \frac{x}{u'},\ u(1) = 1,\ u'(1) = 1;$$

$$u'' = xu' + u + 1,\ u(0) = 1\ , u'(0) = 0.$$

ESERCIZIO n.12 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a cofficienti costanti o la soluzione dei problemi ai dati iniziali:
$u'' - 2u' + u = 0,\ u(1) = 0,\ u'(1) = e$; $u'' - 3u' + 2u = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0$; (Faedo-Modica)
$u'' + u' - 2u = 0$; $4u'' - 20u' + 25u = 0$; $u'' - 4u' + 3u = 0,\ u(0) = 6,\ u'(0) = 10$. (Berman)

ESERCIZIO n.13 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni lineari a cofficienti costanti o la soluzione dei problemi con dati iniziali o al bordo:
$u'' - 3u' + 2u = x^2$; $u'' + 2u' + 10u = x^3 - 1$; $2u'' + u' - u = 2e^x$; $u'' + 2u' + 5u = \sin x$;
$u'' - 3u' + 2u = f(x)$ nei seguenti casi:
$10e^{-x},\ 3e^{2x},\ 2\sin x,\ 2x^3 - 30,\ 3x + 5\sin 2x,\ 2e^x - e^{-2x},\ \sinh x$;
$u'' + u = \dfrac{1}{\cos x}$;
$u'' + u = \sin 2x,\ x \in [0;\pi],\ u(0) = u(\pi) = 0.$

ESERCIZIO n.14 Se $y \not\equiv 0$ è soluzione di: $u''(x) + u'(x)f(x) + u(x)g(x) = 0$, allora

$$z(x) \ = cy(x) \int^x \frac{e^{-\int^t f(s)ds}}{y^2(t)} dt$$

è soluzione della stessa.

ESERCIZIO n.15 Si trovino le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$u'' - \tan x \cdot u' + 2u = 0,\ u'' - u' + \frac{y}{x} = 0.$$

ESERCIZIO n.16 Si trovi lo sviluppo di Taylor in 0 della soluzione di $u'' = x^{101}u$.

ESERCIZIO n.17 Si risolvano le seguenti equazioni di tipo Eulero:

$x^2u'' + xu' - u = x\ (x > 0),\ x^2u'' - 9xu' + 21u = 0,\ u'' - \dfrac{u'}{x} + \dfrac{u}{x^2} = \dfrac{2}{x}.$

ESERCIZIO n.18 Si studino le seguenti equazioni di tipo Riccati:

$u' = \dfrac{2}{x^2} - u^2,\ \ u' = u^2 - ux + 1.$

(*) ESERCIZIO n.19 Si trovino tutte le soluzioni $(u;\lambda)$, ove le incognite sono: u funzione definita su $[0;\pi]$, e λ numero reale, dei problemi:

$u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi) = 0;\ \ u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi);$
$u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi),\ u'(0) = u'(\pi);\ u'' = \lambda \cdot u,\ u(0) = u(\pi) = u'(0) = u'(\pi) = 0.$

ESERCIZIO n.20 Si trovino tutte le soluzioni $(x,y) \mapsto u(x,y)$ delle seguenti equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \quad e^{-x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \quad e^{y}\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

ESERCIZIO n.21 Si risolva, al variare di α, l'equazione: $(y+\alpha x)\frac{\partial u}{\partial x} - (x+\alpha y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

ESERCIZIO n.22 Ci si riferisce agli esercizi numero 2, 3, del quarto foglio di esercizi.

ESERCIZIO n.23 a- Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$
per cui $u(0,x) = \varphi(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$.
(*) b- Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x)$
per cui $u(0,x) = \varphi(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$.

ESERCIZIO n.24 a- Si considera l'equazione: (*) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$
b- Si verifichi che per $\lambda \in \mathbf{C}$ le funzioni $e^{\lambda x}e^{\lambda^2 t}$ sono soluzioni.
b- Per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$ si trovino tutte le soluzioni $\left(\frac{d}{dt} - \lambda^2\right)^{k+1}\varphi(t) = 0$ e $\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^{k+1} w(x) = 0$
c- Si mostri quindi che

$$u_{\lambda,k}(t,x) = \left[\sum_{h=0}^{k}\left(\frac{d}{dt} - \lambda^2\right)^{k-h}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^{h}\right] t^k x^k e^{\lambda^2 t + \lambda x}, \quad (\lambda \neq 0)$$

sono soluzioni di $(*)$. Che succede per $\lambda = 0$?