Complementi di Analisi Matematica
Anno Accademico 2003-2004
Laurea specialistica in Informatica
R.Stasi, V.M. Tortorelli

II foglio di esercizi
dal 3 marzo 2004 al 10 marzo

ESERCIZIO n. 1 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$$\frac{xy}{x^2+y^2};\ \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2};\ x^2\log(x^2+y^2);\ \frac{x\sin y}{y\sin x};\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^4};\ \frac{\sin(x|y|)}{x^2+|y|};\ \frac{e^{x^2y}-x\sin(xy)-1}{(x^2+y^2)^2}:\ (x,y)\to(0,0);$$

$$\frac{x+y}{3x+2y};\ \frac{x^3+y^2}{x^2y^2};\ \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3};\ \frac{y^2+x+y}{x^2+x+y};\ \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha+|y|^\alpha};\ \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}:\ (x,y)\to(0,0),\ \alpha>0,\ P,\ Q \text{ polinomi nulli in } (0,0);$$

$$\frac{y}{x^2-y}:\ (x,y)\to(0,0);\ \frac{y}{x^2-y}:\ (x,y)\underset{|y|\le|x|}{\to}(0,0);$$

$$x-y^2:\ x^2+y^2\to\infty;\ x-y^2:\ x^2+y^2\underset{2y^2\le x}{\to}\infty;\ \frac{x^2+y}{x^2+y^2+2xy}:\ x^2+y^2\to\infty;$$

$$(*)\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^4},\ \frac{x^\alpha+y^\beta}{x^2+y^4}:\ (x,y)\to(0,0),\ \alpha,\ \beta>0.$$

ESERCIZIO n. 2 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$.
2. $\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.
3. $$\begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lambda_1 \\ \exists \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lambda_2 \\ \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lambda_3 \end{cases} \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$$

ESERCIZIO n.4 a) Si studi la continuità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|};\qquad \sqrt{|x|}\cos y;\qquad \int_0^y f(t,x)dt,\ \ f\in\mathcal{C}(\mathbf{R}^2);\ \ f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy-\sin xy}{x^6+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

b) Se ne studi la derivabilità nelle diverse direzioni.

c) Se ne studi la differenziabilità.

ESERCIZIO n. 3 Se $f(x,y)=x^{x^{x^y}}+\log x(\operatorname{artan}(\operatorname{artan}(\operatorname{artan}(\sin(\cos(xy)+\log(x+y))))))$, si calcoli la derivata rispetto a y nel punto $(1,y)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)$.