Matematica, Anno Accademico 2009-2010,
Biotecologie
MINIMO TEORICO INTEGRAZIONE: V.M. Tortorelli
23 marzo 2010

RIEMANN-LEBESGUE INTEGRABILTÀ E SOMMABILITÀ IN SENSO GENERALIZZATO

Si richiamano alcune definizioni (*cfr. lezione 6 del 13-10-09*)

Misurabilità alla Peano-Jordan

- Un n-rettangolo (cartesiano) in $\mathbf{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n segmenti con o senza estermi: $R = I_1 \times \dots I_n = \{(x_1, x_2, ...) : x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2,\ \dots\}$, I_i, $1 \leq i \leq n$. In particolare $[a,b] \times [a,b] \times \dots$ si denota con $[a,b]^n$. Gli 1-rettangoli in $\mathbf{R}$ sono i segmenti.
- La misura elementare di un n rettangolo è il prodotto delle differenze degli estremi dei lati.

Definizione se $A \subset \mathbf{R}^n$ non vuoto e *limitato* si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} me(R)$: al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli disgiunti contenuti in A (approssimazione interna)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} me(R)$: al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli con unione contenente A (approssimazione esterna)

Nel caso il valore si dice misura (n-dimensionale) di Peano-Jordan: $m(A)$, $m_n(A)$. Si ha:
• $m(\emptyset) = 0$, • $m(R) = me(R)$ se R è rettangolo cartesiano, • $m(A) \leq m(B)$ se $A \subseteq B$,
• $m(\{tv : v \in A\}) = |t|^n m(A)$, $m(R(A)) = m(A)$ R rotazione , $m(\{v + w : v \in A\}) = m(A)$
• se A e B hanno misura la hanno $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

Misurabilita' in senso generalizzato e misura di insiemi non limitati

Se $A \subseteq \mathbf{R}^n$ è non limitato si dirà misurabile in senso generalizzato se la sua intersezione con ogni n-rettangolo $[-k,k]^n$ è misurabile, nel caso si pone

$$m(A) \ = \ \lim_{k \to +\infty} m(A \bigcap [-k,k]^n)$$

Funzione indicatrice o caratteristica Si ricorda che dato un insieme A la sua funzione indicatrice o caratteristica è quella che su A vale 1 al di fuori di A vale 0. Si indica con χ_A: $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$

Integrabilità alla Riemann

La nozione di integrale (non orientato) è quella di misura "con segno" delle zone comprese tra grafico della funzione da integrare e dominio.

Piuttosto che usare direttamente la nozione di misura di Peano-Jordan conviene restringersi a famiglie di n-rettangoli particolari: quelli che hanno basi sul domino e altezze che arrivano giusto sino al grafico delle funzioni.

Le basi che "toccano " il grafico costituiscono a loro volta il grafico di una funzione costante " a tratti ".

Quindi l'integrale di una funzione, quando ben definito, si approssima con le somme dei prodotti base per altezza.

Definizione Una funzione *limitata* f a valori in $\mathbf{R}$ si dice Riemann integrabile su un n-rettangolo Q (nulla fuori da Q) se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} \inf_R f me(R)$: al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli con parti interne disgiunte con unione Q

(approssimazione inferiore, interna nel caso di funzioni positive)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} \sup_R f me(R)$: al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli con unione Q

(approssimazione superiore, esterna nel caso di funzioni negative)

In tal caso il comune valore si dice integrale di Riemann di f su Q e si indica con $\int_Q f(x)dx$.

Teorema 1.
0- A è P.-J. misurabile se e solo se χ_A è R.-integrabile e $m(A) = \int \chi_A$.
i- se $f \geq 0$ allora f è R.-integrabile su Q se e solo se il suo sottografico su Q è P.J.-misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$. Nel caso $m_{n+1}(\{(x,y):\ x \in Q,\ 0 \leq y \leq f(x)\}) = \int_Q f(x)dx$.
• **media integrale** se f è R.-integrabile su Q è il numero $\frac{1}{m(Q)} \int_Q f dx = f(\xi)$.
ii- una funzione continua limitata f su un n-rettangolo R è R.-integrabile.
• Dai teoremi degli zeri e di Weiestrass se R è chiuso segue: vi è $\xi \in R$ e $\frac{1}{m(R)} \int_R f dx = f(\xi)$.
• Se f è continua su R chiuso allora se per ogni k si suddivide R in un numero finito $N(k)$ di n-*cubi* che non si sovrappongano $R = R_0 \cup \ldots \cup R_{N(k)}$ con *spigolo lungo meno* di $\frac{1}{k}$ si ha comunque si scelgano $\xi_i \in R_i$:

$$\int_R f(x)dx \ = \ \lim_{k \to +\infty} f(\xi_0)m(R_0) + ... + f(\xi_{N(k)})m(R_{N(k)})$$

iii- se f e g sono R.-integrabili tale è fg.
• Se $g = \chi_A$ l'integrale di questo prodotto si indica con $\int_A f(x)dx$.
Una funzione costante $f(x) = 14$ su A misurabile è integrabile e $\int_A f = 14m(A)$
Notazione In piú dimensioni $x = (x_1, x_2...)$ il dx si scrive anche $dx_1 dx_2...$, corrisponde all'intuzione di volume infinitesimo $dVol_n(x)$ o $dVol(x_1, x_2...)$, n-volume infinitesimo del n-rettangolo con spigoli infinitesimi $dx_1,\ dx_2$ ...: $|det(dx_1, 0, ...), (0, dx_2, 0, ...), ...|$. Il prodotto $f(x)dVol(x)$ è intuitivamente un (n+1)-volume di base infinitesima per altezza $f(x)$.
Osservazione - I razionali tra 0 ed 1 non sono un insieme misurabile: non contentendo alcun intervallo la misura interna è nulla mentre ogni intervallo contiene un razionale quindi la misura esterna è 1.
- Se una funzione è R. integrabile lo è anche il suo modulo. Il viceversa non è vero si pensi alla funzione che vale 1 sui razionali tra 0 ed 1 e che vale -1 sugli irrazionali tra 0 e 1.

Osservazione - Se si considera la media campionaria $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ e si fa il seguente parallelo

l'insieme $\{1, \ldots n\}$ corrisponde	al dominio di integrazione Q
gli indici $1, \ldots n$ corrispondono	alla variabile di integrazione x
i valori $x_i,\ 1 \leq i \leq n$ corrispondono	ai valori della funzione $f(x),\ x \in Q$
il numero $\frac{1}{n}$ frequenza relativa del campione x_i corrisponde	alla frequenza relativa infinitesima $\frac{dx}{m(Q)}$ del valore $f(x)$
la somma corrisponde	all'integrale

si ha una corrispondenza tra le due nozioni.
Osservazione - Vi sono sottoinsiemi del piano non limitati per cui i limiti delle misure delle loro intersezioni con quadrati sempre più grandi sono finiti: *e.g.* l'unione dei rettangoli di basi rispettive $[n-1, n]$ e altezza $\frac{1}{2^{n-1}}$. La somma delle prime N aree è $1 + 1/2 + \ldots 1/2^{N-1} = 2(1 - 1/2^N) \to 2$
- Analogamente vi sono funzioni non limitate per cui i limiti degli integrali delle "troncate " sono finiti: la funzione il cui sottografico è l'insieme del precedente esempio ruotato di $\pi/2$.
Conviene quindi estendere il concetto di integrale a funzioni e domini non limitati:

Integrabilità in senso generalizzato e sommabilità à la Riemann-Lebesgue.

Per una funzione non negativa f l'integrabilità in senso generalizzato è alla lettera la misurabilità in senso generalizzato del sottografico sopra il dominio della funzione.

Quindi l'integrale in senso generalizzato sarà il limite delle misure dei sottografici intersecato (n+1)-quadrati sempre più grandi. Se tale limite (che esiste sempre) è finito la funzione si dirà *sommabile*. Osservando che la funzione f è non negativa le intersezioni del suo sottografico con $[-k, k]^{n+1}$ non sono altro che i sottografici della funzione $x \mapsto \chi_{[-k,k]^n}(x) \min\{f(x), k\}$.

Quindi la nozione si estende a funzioni di segno variabile trattando separatamente ove è negativa e dove è positiva.

Definizione - Una una funzione a valori reali *non negativa* f si dice *sommabile* in senso generalizzato se:
- $\forall k \in \mathbf{N}$ $x \mapsto \min\{f(x), k\}$ è R.-integrabile su $[-k;k]^n$, (integrabilità in senso generalizzato)
- $\int_{[-k;k]^n} \min\{f(x), k\}dx$ converge in $\mathbf{R}$ per $k \to +\infty$ (sommabilità).
Tale limite si dirà integrale in senso generalizzato e si indicherà con $\int f dx$.
- Una funzione a valori reali si dice integrabile in senso generalizzato se lo sono la sua parte positiva $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e la sua parte negativa $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Si dice sommabile se lo sono f^+ ed f^-. Il suo integrale in senso generalizzato sarà la differenza tra quelli delle due: $\int f dx = \int f^+ dx - \int f^- dx$

Osservazione - Le funzioni Riemann integrabili sono sommabili sugli n-rettangoli.
- Contrariamente alla Riemann integrabilità il fatto che il modulo di una funzione sia sommabile è equivalente al fatto che la funzione stessa sia sommabile.
- Prodotto di funzioni integrabili in senso generalizzato è integrabile in senso generalizzato.
- Invece si osserva che se due funzioni f e g sono sommabili non è detto che lo sia il loro prodotto, contrariamente a quanto accade per l'integrale alla Riemann: per esempio $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$ su $]0, 1]$ sono sommabili il loro prodotto $x \mapsto \frac{1}{x}$ no.
- Ciò accade se una è limitata e integrabile in senso generalizzato e l'altra sommabile.

Integrali impropri à la Cauchy

La nozione geometrica di sommabilità ora data per integrare funzioni non limitate su domini non limitati non va confusa con quella di integrale *improprio* che permette di *sottrarre infiniti* compensando l'eventuale integrale infinito della parte positiva con l'infinito dell'integrale della parte negativa, una cui variante è utile per il calcolo con le trasformate e serie di Fourier. Ci si limita ad esemplificare questa nozione per funzioni di una variabile.

Definizione: Integrale improprio di funzioni illimitate nell'intorno di un punto.
Sia $f : [a, c[\cup]c, b[\in \mathbf{R}$ se:
- f è Riemann integrabile su tutti i segmenti chiusi $[a, d]$ $d < c$, ed $[e, b]$ $c < e$
- esistono *finiti* i due limiti $\lim_{d \to c} \int_{[a,d]} f(x)dx$ $\lim_{e \to c} \int_{[e,b]} f(x)dx$

allora f si dice integrabile in senso improprio su $[a, b]$ e il suo integrale improrpio sarà

$$\int_{[a,b]} f(x) = \lim_{d \to c} \int_{[c,a]} f(x)dx + \lim_{e \to c} \int_{[e,b]} f(x)dx$$

Se la funzione fosse non limitata intorno a più punti (per semplicità un numero finito di punti, ma potrebbero essere una successione con un numero finito di punti limite e così via), si definisce l'integrale improprio come limite degli integrali impropri per cui si ha già l'esistenza.

Definizione: Integrale improprio di funzioni definite su tutta la retta o su una semiretta.
Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se:
- f è *integrabile in senso improprio* su tutti i segmenti
- dato $a \in \mathbf{R}$ esistono *finiti* i due limiti $\lim_{b \to +\infty} \int_{[a,b]} f(x)dx$ $\lim_{c \to -\infty} \int_{[c,a]} f(x)dx$

allora f è integrabile in senso improprio sulla retta e il suo integrale improprio sarà

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) = \lim_{c \to -\infty} \int_{[c,a]} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{[a,b]} f(x)dx$$

- Da questo punto di vista la sommabilità invece permette che vi siano insiemi veramente "bizzarri" intorno ai punti dei quali la funzione integranda può essere non limitata senza particolari accortezze nel definire l'integrale.

Osservazione - Può essere che una funzione sia integrabile in senso improprio e il suo modulo no, esempio:$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ su $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, si noti che è limitata intorno a 0: converge ad 1! l'integrale è improprio solo perchè si è su un dominio illimitato.
- Caso tipico di funzione non limitata intorno a un punto è quello di funzione il cui grafico ha un asintoto verticale.

Proposizione Relazione tra le due nozioni: Una funzione illimitata intorno ad un insieme di punti che non si accumulano (o i cui punti limite non si accumulano e così via) è *sommabile* se e solo se *sia la funzione che il suo modulo* sono integrabili in senso improprio.

Teorema 2. Proprietà principali della sommabilità

1- le funzioni sommabili formano uno spazio vettoriale (cfr.*lez 9 del 20-10-09*) e l'integrale definisce una funzione lineare (cfr.*lez 9 del 20-10-09*) a valori numeri su tale spazio vettoriale $T : f \mapsto \int f dx$: $\int (f + rg)dx \;=\; \int f dx \;+\; r \int g dx \;,\;\; r \in \mathbf{R}$;

2- il minimo e il massimo tra due funzioni sommabili sono anch'essi sommabili (reticolo),

- se $f \geq g$ allora $\int f \geq \int g$ (monotonia dell'integrale),

3- $|\int f| \leq \int |f|$ (diseguaglianza triangolare: modulo della somma $\leq$ somma dei moduli),

4 - $\int f(tx)dt = |t|^n \int f(x)dx$ con $t \in \mathbf{R}$ (positiva n-omogeneità per dilatazioni)

- $\int f(x + v)dx = \int f(x)dx$ (invarianza per traslazioni).
- $\int f(R(x))dx = \int f(x)dx$ R rotazione (invarianza per rotazioni)

5 - se A e B sono misurabili in senso generalizzato tali sono $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$,

- se f è sommabile sull'unione allora $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$ (additività).

6- *Teorema di convergenza dominata*

data una successione di funzioni sommabili $x \mapsto f_1(x)$, ... $x \mapsto f_k(x) \ldots k \in \mathbf{N}$

se tranne in un iniseme M di x di misura nulla

- vi è qualche funzione sommabile $x \mapsto g(x)$ maggiore di tutti i loro valori assoluti $|f_k(x)| \leq g(x)$ per ogni k per ogni $x \notin M$
- esiste $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ per ogni $x \notin M$
- la funzione f limite $x \mapsto \chi_{\mathbf{R}^n\setminus M}(x) \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ sia integrabile in senso generalizzato

allora

- la funzione f è sommabile e $\displaystyle\int f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n\setminus M} \lim_{k\to+\infty} f_k(x)dx \;=\; \lim_{k\to+\infty} \int f_k(x)dx$

6 bis - *Teorema di convergenza monotona*:

se $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots f_k(x) \ldots$ sono integrabili e il loro limite è integrabile anche non sommabili si ha comunque $\displaystyle\int f(x)dx = \int \lim_{k\to+\infty} f_k(x)dx \;=\; \lim_{k\to+\infty} \int f_k(x)dx$

- CONSEGUENZE: se f è sommabile e $A_1, A_2 \ldots$ sono misurabili disgiunti e la loro unione è misurabile allora $\displaystyle m(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k) = \sum_{k+1}^{+\infty} m(A_k)$, $\displaystyle\int_{\cup_{k\in\mathbf{N}} A_k} f dx = \sum_{k+1}^{+\infty} \int_{A_k} f dx$

7- INTEGRALI ITERATI RIDUZIONE AD INTEGRALI IN UNA VARIABILE:

Per integrare funzioni sommabili o integrabili di segno costante continue su insiemi che siano unione di insiemi compresi tra grafici di funzioni continue (con un una variabile in meno) definite a loro volta su insiemi dello stesso tipo fino ad arrivare a unioni di sottoinsiemi del piano compresi tra grafici di funzioni continue su un intervallo, ci si riduce *integrali iterati di una variabile, e.g.*

$$\int_{g(x,y)\leq z\leq f(x,y),\; h(x)\leq y\leq k(x),\; a\leq x\leq b} \varphi dxdydz = \int_{[a,b]} \left(\int_{[h(x),k(x)]} \left(\int_{[g(x,y),f(x,y)]} \varphi(x, y, z)dz \right) dy \right) dx$$

7bis - SCAMBIO DELL'ORDINE DI INTEGRAZIONE: nelle precedenti ipotesi si puó scambiare l'ordine delle variabili in cui si eseguono gli integrali iterati *esprimendo diversamente il dominio di integrazione. e.g.*

$$\int \psi(x, y, z)dx\, dy\, dz = \int \left(\int \left(\int \psi(x, y, z)dz \right) dx \right) dy = \int \left(\int \left(\int \psi(x, y, z)dy \right) dx \right) dz = \ldots$$

Osservazione - Nelle lezioni 6 del 13-10-09, 10 del 26-10-09, 19 del 19-11-09, 26 del 14-12-09 dal concetto di misura finitamente additiva si è definita la probabilità numerabilmente additiva. I teoremi di convergenza dominata e monotona garantiscono le regole di calcolo (cfr. lez. 26 del 14-12-09) con passaggio al limite delle probabilità sono soddisfatte.

In particolare se $f \geq 0$ è sommabile e $\int f dx = 1$ allora $A \mapsto P(A) = \int_A f dx$ *è una probabilità*.
- Le ipotesi cruciali nei suddetti teoremi sono quelli che gli insiemi unione, e le funzioni limite siano rispettivamete misurabili e integrabili in senso generalizzato.In effetti gli insiemi misurabili in senso generalizzato non costituisco una $\sigma-$algebra (cfr. lez. 26 14-12-09): non è detto che un'unione numerabile di misurabili in senso generalizzato lo sia. Come non è detto che limite di funzioni integrabili in senso generalizzato lo sia. Per ottenere queste proprietà vanno estesi l'integrale e la misura in senso generalizzato.

Osservazione - Rilevante è la riduzione di un integrale multidimensionale a successive integrazioni di funzioni di una variabile: le principali regole di calcolo degli integrali si hanno per funzioni di una variabil grazie al legame tra integrali di funzioni continue e funzioni primitive.
- Si esemplifica ulteriormente la regola di riduzione nello spazio tridimensionale per l'integrale come volume del sottografico di una funzione di due variabili.

Rispetto all'enunciato si considera una $\varphi(x,y)$ di due sole variabili, non negativa definita nell'insieme del piano tra i grafici delle funzioni di una variabile $h(x)$ e $k(x)$ definte su $[a,b]$.
$\int_{h(x)\leq y\leq k(x),\ a\leq x\leq b} \varphi(x,y)dxdy =$Volume tra la "base" $\{(x,y) : a \leq x \leq b \ e \ h(x) \leq y \leq k(x)\}$ e grafico di $\varphi =$
"affettando in maniera fitta" la regione V in questione con piani verticali perpendicolari all'asse delle x, il volume è approssimato dalla somma dei volumi di queste sottili sezioni della regione. Al limite la "somma' diventa un integrale rispetto alla variabile x, e per ognuna di queste sezioni verticali V(x) il volume diventa il prodotto tra l'area A(x) della sezione e lo spessore infinitesimo dx della base della sezione. Quindi $= \int_{[a,b]} A(x)dx=$
L'area A(x) è l'integrale della funzione ottenuta restringendo φ a una retta verticale nel piano tenendo fissa la prima variabile: $y \mapsto \varphi(x,y)$ dominio $[h(x),k(x)]$ avendo fissato $x \in [a,b]$, quindi: $= \int_{[a,b]} \left(\int_{[h(x),k(x)]} \varphi(x,y)dy \right) dx$

Osservazione - per lo scambio degli integrali, con gli esercizi ci si accorge che la parte più ostica di solito è esprimere un dominio di integrazione che è compreso tra due grafici rispetto ad una variabile come unione di zone tra grafici rispetto ad un'altra variabile.
- per esemplificare lo scambio: dato $A \subseteq \mathbf{R}^3$ con variabili (x_1,x_2,x_3) siano le sue proiezioni monodimensionali $\pi_i(A) = \{x_i : \exists (x_j,x_k)\ t.c.\ (x_1,x_2,x_3) \in A\}$ e siano le sue sezioni $A_{x_i} = \{(x_j,x_k) : (x_1,x_2,x_3) \in A\}$, $A_{x_ix_j} = \{x_k : (x_1,x_2,x_3) \in A\}$ si ha per esempio

$$\int_{\pi_1(D)} \left(\int_{D_{x_1}} \varphi(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3 \right) dx_1 = \int_{\pi_1(D)} \left(\int_{\pi_3(D_{x_1})} \left(\int_{D_{x_1x_3}} \varphi(x_1,x_2,x_3)dx_2 \right) dx_3 \right) dx_1$$

Integrali di Vettori Se si hanno funzioni a valori in $\mathbf{R}^m$ $f(x) = (f_1(x), f_2(x)...)$ si può definire $\int f(x)dx = \left(\int f_1(x)dx, \int f_2(x)dx, \ldots \right)$
- In particolare identificando per funzioni a valori complessi con funzioni a valori nel piano:

$$\int [\varphi(x)\ +\ i\psi(x)]dx = \int \varphi(x)dx\ +\ i \int \psi(x)dx$$

- Considerando le norme *vale ancora la diseguaglianza triangolare.*

Baricentro di una distribuzione di massa su un dominio D è un integrale del vettore posizione $\vec{P} = (x,y,z)$ rispetto alla distribuzione infinitesima di massa $\frac{dM}{M(D)}$, ove $M(D)$ è la massa totale: $\frac{1}{M(D)} \int_D \vec{P}dM$
Nel caso in cui la distribuzione di massa abbia una densità rispetto alla posizione cioè $dM = f(\vec{P})dVol(\vec{P}) = f(x,y,z)dxdydz$ le c oordinate del baricentro sono:

$$\left(\frac{1}{\int_D f dxdydz} \int_D xf(x,y,z)dxdydz, \frac{1}{\int_D f dxdydz} \int_D yf dxdydz, \frac{1}{\int_D f dxdydz} \int_D zf dxdydz \right)$$