Matematica per Biotecnologie
A.A. 2009-2010 III Appello 14 Settembre 2010

1 La retta immagine del cammino $t \mapsto (t,t,t)$, è parallela al vettore $(1,1,1)$ [velocità rispetto a t]

La retta ortogonale al piano di equazione $x+2y+3z=4$ cioè $(x-1, y, z-1)\cdot(1,2,3)=0$ è parallela al vettore $(1,2,3)$

Il coseno dell'angolo di incidenza $\widehat{(1,2,3)\,(0,0,0)\,(1,1,1)} =$

$$= \frac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)}{|(1,1,1)|\,|(1,2,3)|} = \frac{1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

2 Il volume del parallelepipedo di vertici $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$ $C(1,1,2)$, $D(2,2,1)$, $B+C-A$, $B+D-A$, $C+D-A$, $B+C+D-2A$

è eguale a quello del parallelepipedo traslato con $A \longmapsto (0,0,0)$ cioè di vertici

$\underset{A-A}{(0,0,0)}$ $\underset{B-A}{(0,1,1)}$ $\underset{C-A}{(0,0,1)}$, $\underset{D-A}{(1,1,0)}$ etc...

dato da $\left|\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right| =$ [sviluppo I° riga] 1

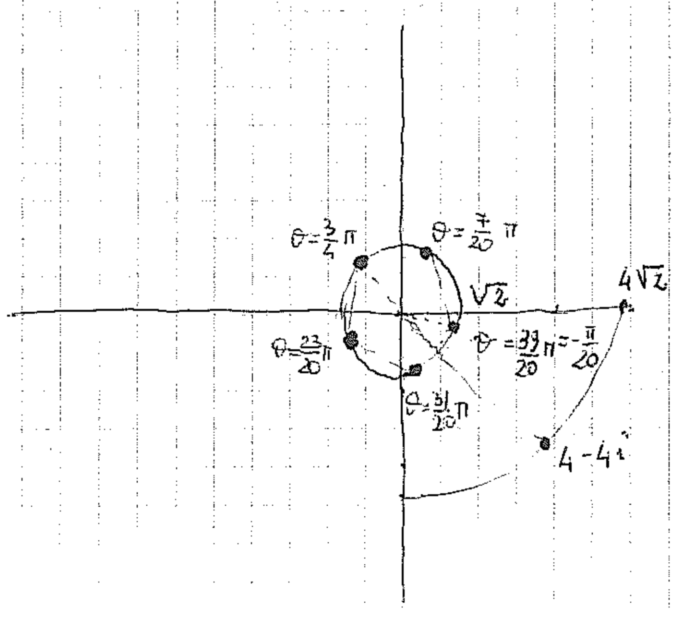
3 $4-4i =$ [forma polare] $\sqrt{4^2+4^2}\left(\frac{4}{\sqrt{4^2+4^2}} - \frac{4}{\sqrt{4^2+4^2}}\,i\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Se $z^5 = 4-4i$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \iff$ $\rho = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{7}{20}\pi + \frac{2}{5}k\pi$ $\left(5\theta = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right)$

$= -\frac{\pi}{20}\pi + \frac{2}{5}k\pi$



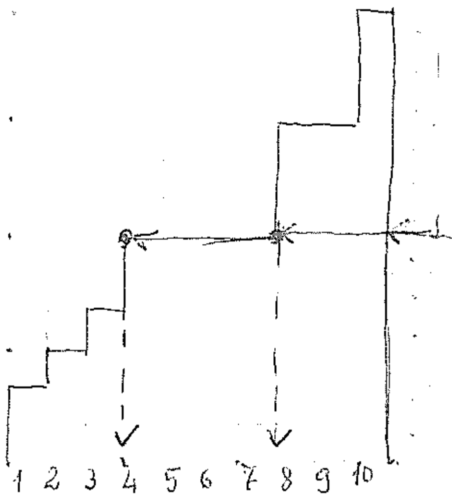
$\theta = -\frac{\pi}{20}$, $-\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi = \frac{7}{20}\pi$,

$-\frac{\pi}{20} + \frac{4}{5}\pi = \frac{15}{20}\pi = \frac{3}{4}\pi$,

$-\frac{\pi}{20} + \frac{6}{5}\pi = \frac{23}{20}\pi$.

$-\frac{\pi}{20} + \frac{8}{5}\pi = \frac{31}{20}\pi$

4a



Un campione con diagramma di ripartizione in figura ha dimensione 12

I valori di MODA SONO
8 e 10

I valori mediani SONO
4 e 8

in effetti il diagramma delle frequenze sugli effettivi è

e ordinando in modo crescente il campione:

$$\begin{array}{cccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \underbrace{4 & 8}_{\text{MEDIANI}} & 8 & 8 & 10 & 10 & 10 \end{array}$$

b

$$\text{MEDIA} = \frac{1+1+2+3+4+4+8+8+8+10+10+10}{12} =$$

$$= \frac{15+24+30}{12} = \frac{69}{12} = \frac{23}{4}$$

$$\text{VARIANZA} = \frac{2\left(1-\frac{23}{4}\right)^2 + \left(2-\frac{23}{4}\right)^2 + \left(3-\frac{23}{4}\right)^2 + 2\left(4-\frac{23}{4}\right)^2 + 3\left(8-\frac{23}{4}\right)^2 + 3\left(10-\frac{23}{4}\right)^2}{12}$$

$$= \frac{2\cdot 19\cdot 19 + 15\cdot 15 + 11\cdot 11 + 2\cdot 7\cdot 7 + 3\cdot 9\cdot 9 + 3\cdot 17\cdot 17}{12\cdot 16}$$

$$= \frac{2\cdot 361 + 225 + 121 + 2\cdot 49 + 3\cdot 81 + 3\cdot 289}{12\cdot 16}$$

$$= \frac{\overbrace{722 + \overbrace{225+121}^{346} + 98}^{820} + \overbrace{243 + 867}^{1110}}{12\cdot 16} =$$

$$= \frac{2276}{12\cdot 16} = \frac{1138}{6\cdot 16} = \frac{569}{6\cdot 8} = \frac{569}{48} =: V$$

$$\left|\frac{V-\bar{V}}{\bar{V}}\right| = e_{rel} \le \frac{1}{100} \qquad V = \frac{569}{48} = 11 + \frac{41}{48} = 11 + \frac{8}{10} + \frac{26}{480}$$

$$\boxed{\bar{V} = 11 + \frac{8}{10} = 11,8 = \frac{118}{10}}$$

$$V - \bar{V} = \frac{26}{480} \qquad e_{rel} = \frac{26}{480}\cdot\frac{10}{118} = \frac{26}{48\cdot 118} < \frac{1}{100}$$

5 a Per ipotesi (decorrenza mensile della patologia) se la malattia insorge in un dato giorno non può insorgere il giorno successivo: chi è malato non si ammala. Se si pone

A ammalarsi in un dato giorno

B " il giorno dopo

si ha $A \cap B = \emptyset$

Si tratta di calcolare $P(A \cup B) =$ [additività per eventi disgiunti] $P(A) + P(B)$

$P(A) = 3\%$ per ipotesi

Per il calcolo di $P(B)$ conviene pensare la situazione modellata con due tentativi ordinati e indipendenti di uno schema "successo" S, "insuccesso" con $P(S) = 3\%$.

A corrisponde all'evento $\{(S, S), (S, \text{non} S)\}$

B " " $\{(\text{non} S, S)\}$ quindi

$P(B) = P((\text{non} S, S)) = P(\text{non} S \text{ al primo tentativo e } S \text{ al secondo}) =$

$=$ [indipendenza] $P(\text{non} S \text{ al primo})\, P(S \text{ al secondo}) =$

$= 97\% \cdot 3\%$

Quindi $\quad P(A \cup B) = 3\% + 3\% \cdot 97\%$

b Dato uno dei soggetti in osservazione sia X la variabile aleatoria

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se il soggetto si ammala nei quattro giorni} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\langle X \rangle = \sum k P(X = k) = P(X = 1) =$ ragionando come al punto a), pensando a quattro tentativi dello schema "successo - insuccesso"

$= 3\% + 3\% \cdot 97\% + 3\%(97\%)^2 + 3\%(97\%)^3 = 1 - (97\%)^4$

Consideriamo per ogni soggetto tra i 100 in esame la variabile descritta:

si hanno 100 variabili identicamente distribuite $X_1, \dots X_{100}$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se il soggetto } i^{\text{esimo}} \text{ si ammala nei quattro giorni} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia

N = numero dei malati nei quattro giorni $= X_1 + \dots + X_{100}$

numero medio dei malati $= \langle N \rangle = \langle X_1 + \dots + X_{100} \rangle = \langle X_1 \rangle + \dots + \langle X_{100} \rangle$

$=$ [eguale distribuzione] $100 \langle X_1 \rangle = 100\, P(X_1 = 1) =$

$= 3\,(1 + 97\% + (97\%)^2 + (97\%)^3) = 3 \cdot \dfrac{1 - (97\%)^4}{3\%} = 100 - 97\,(97\%)^4$

6 a Retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$: nel caso

$$f(x) = \frac{\lg(1-\lg x)}{x} \qquad x_0 = 1 \qquad f(x_0) = f(1) = \frac{\lg(1-\lg 1)}{1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{x \frac{-\frac{1}{x}}{1-\lg x} - \lg(1-\lg x)}{x^2} \qquad f'(1) = -1$$

$$y = -(x-1) = -x+1$$

b Il punto $P(-2, 1, 1)$ appartiene in effetti alla regione definita da $e^{x+y^2+z^3} = 1$: $e^{-2+1+1} = e^0 = 1$

Poiché $\nabla e^{x+y^2+z^3}\Big|_{\substack{x=-2\\ y=1\\ z=1}} = \left(e^{x+y^2+z^3}, 2y e^{x+y^2+z^3}, 3z e^{x+y^2+z^3}\right)\Big|_{\substack{x=-2\\ y=1\\ z=1}} =$

$= (1, 2, 3)$ è ortogonale alla regione e non nullo vi è piano tangente: quello ortogonale a $(1, 2, 3)$ e passante per $(-2, 1, 1)$

$$(x+2) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$$

$$x + 2y + 3z = 3$$

7 La superficie data da $(x, y) \mapsto (x, y, xy)$ $x^2+y^2 \leq 1$ è il grafico di $f(x, y) = x \cdot y$ su $x^2+y^2 \leq 1$

La sua area è data dalla formula semplificata

$$\iint_{\{(x,y):\, x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \iint_{\{(x,y):\, x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{1+y^2+x^2}\, dx\, dy =$$

$$= [\text{coordinate polari}] \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\, \rho\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\, \rho\, d\rho = \pi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\, d\rho^2 = \pi \int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt =$$

$$= \pi \int_1^2 \sqrt{s}\, ds = \pi \left[\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \pi\left(\frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

8 $$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^t$$

- Soluzioni omogenea $z''(t) - 2z'(t) + 2z(t) = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda = 1 \pm i$$

$$z(t) = a e^t \cos t + b e^t \sin t$$

- Soluzione particolare $y^*(t) = \alpha e^t$

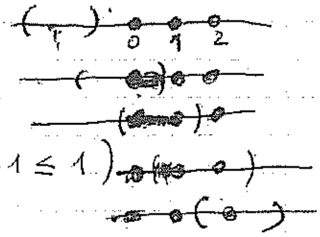
$$e^t = \alpha e^t - 2\alpha e^t + 2\alpha e^t$$

$$1 = \alpha - \cancel{2\alpha} + \cancel{2\alpha} \qquad y^* = e^t$$

- Soluzioni $y(t) = (a\cos t + b \sin t + 1)e^t$

9) a $g(z) = \text{lunghezza } [0,1] \cap [z-1, z+1] =$

$$= \begin{cases} 0 & z \le -1 \quad (z+1 \le 0) \\ z+1 & -1 < z \le 0 \quad (0 < z+1 \le 1) \\ 1 & 0 < z < 1 \quad (1 < z+1 \le 2) \\ 2-z & 1 < z \le 2 \quad (z+1 > 2 \text{ e } z-1 \le 1) \\ 0 & 2 < z \quad (z-1 > 1) \end{cases}$$



b $$P(|X-z| \le 1) = P(z-1 \le X \le 1+z) = \int_{z-1}^{1+z} f(x)\,dx =$$

$$= g(z) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c $$\langle X^2 \rangle = \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$