Matematica, Anno Accademico 2009-2010, Biotecnologie
V.M.Tortorelli
esercizi su integrazione
23 marzo 2010

DEFINIZIONE: Una funzione $x \mapsto F(x)$ definita su un intervallo I si dice *primitiva sull'intervallo* di una funzione $x \mapsto f(x)$ se: F è derivabile su I e $F' = f$ su I. La *famiglia delle primitive di* f su un intervallo si indica con $\int^x f$. Due primitive su un intervallo differiscono per una costante.
TEOREMA [FONDAMENTALE DEL CALCOLO: area calcolata con le primitive]
Se f è continua su $[a;b]$ allora:
i- La funzione integrale $\int_a^x f(y)dy$ è una primitiva
ii- per ogni altra F primitiva di f su $[a;b]$ si ha: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

ESERCIZIO n. 1 a- [PRIMITIVE DI BASE] Si determinino le primitive nulle in $x = 0$ delle seguenti funzioni: e^x, x^2, $\sqrt{x}$, x^a $(a \neq -1)$, $\frac{1}{x+1}$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $1+\tan^2 x$, , $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ [R. $\log(x + \sqrt{1+x^2})$ l'inversa arcosenoiperbolico: arsinh$x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$].
b- [SOSTITUZIONE] Si risponda allo stesso quesito nei casi seguenti tenendo presente la *regola della catena* $F(x) = G(t(x))$: $\frac{dF}{dx}(x) = \frac{dG}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x)$, $t = t(x)$:
$2xe^{x^2}$, $10x(1+x^2)^4$, $\sqrt{5x+9}$, $\frac{1}{\sqrt{5x+9}}$, $\frac{1}{5x+e}$, $\frac{4x}{144+x^2}$, $\frac{\log(1+x)}{1+x}$, $\tan x$, $\frac{g'(x)}{g(x)}$,
$e^{2x}\cos e^{2x}$, $\cos x \sin^{501} x$,
$\frac{1}{144+x^2}$, $\frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$, $\sin^2 x$ $[1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x]$, $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$.
c- [RAZIONALI SEMPLICI] $\frac{x}{(x^2+1)^n}$, $\frac{1}{(x+1)^n}$, $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x+4}{(x+1)^2-6(x+1)}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{x^4+1}$, $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.
d- [PARTI] Si risponda allo stesso quesito nei casi seguenti tenendo presente la regola della *derivata di un prodotto* $F' = G'H = (GH)' - GH'$
$x\sin x$, xe^x, x^2e^x, $x^3\cos x$, $x\sin^2 x$, arsin$x$, $x^a \log x$, $\log^2 x$, $e^x(1+x)\log x$, $\sin ax \cos bx$
e- [SOSTITUZIONE INVERSA] $G(t) = F(x(t))$: $\frac{dF}{dx}(x(t)) = \frac{dG}{dt}(t)\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^{-1}$, $x = x(t)$, per avere la risposta bisogna quindi trovare l'inversa di $t \mapsto x(t)$:
$\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}$ $[x = t^2 - 2]$, $\frac{1}{1+\tan^2 x}$ $[x = \text{artan}\, t]$, $\sqrt{1-x^2}$ $[x = \cos t]$, $\cos(\log(x+1))$ $[x + 1 = e^t]$

ESERCIZIO n. 2 Si provino le formule: $\int \log^n x = x\log^n x - n\int \log^{n-1} + c$, $\int x^n e^x = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x$, $\int x \sin x = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x$, $\int x^a \log^n x = \frac{x^{a+1}\log^n x}{a+1} - \frac{n}{a+1}\int x^a \log^{n-1} x$

RICETTE Se $R(x,y)$, $R(x,y,z)$ sono rapporto di due polinomi le primitive di una funzione del tipo $R(\cos x, \sin x)$ si trovano con la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, di una del tipo $R(x, \sqrt{1-x^2})$ con $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ o $x = \sin t$, di una $R(x, \sqrt{1+x^2})$ con $t = x + \sqrt{1+x^2}$, di $R(x, \sqrt{x^2-1})$ con $t = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$, di $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n}{m}}\right)$ con $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, di $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})$ con $t = \sqrt{ax+b}$.
Inoltre di molte funzioni non si possono calcolare le primitive. Esempi: $\frac{1}{\sqrt{a_0 + \ldots a_n x^n}}$, $\frac{e^x}{x}$, $e^{\pm x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$.

ESERCIZIO n. 3 Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}}, \quad \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx, \quad \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}, \quad \int_0^1 \text{arsin}^4 x dx, \quad \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$$

.

ESERCIZIO n. 4 Stabilre se i seguenti integrali impropri sono convergenti:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx\ ,\quad \int_0^\infty \frac{(2+\cos x)\log x}{x^\alpha}dx \quad \text{(al variare del parametro } \alpha\in\mathbf{R}\text{)}\ ,$$

$$\int_1^\infty \frac{e^x\arctan x}{((2x)^x-1)^2}\,dx\ ,\quad \int_0^\infty\left(1-\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right)dt\ ,\quad \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}x^x-e^{x-2}}{1-x^x}dx\ ,$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-x^2}}dx\ ,\quad \int_0^\pi \frac{1}{\log(\cos x^2)^{\frac13}}dx\ ,\quad \int_1^\infty \left((x^8-1)^{-\frac19}-x^{-\frac89}\right)dx.$$

ESERCIZIO n. 5

Si studi l'integrabilità, e quindi la convergenza degli integrali, al variare dei parametri reali α e β delle funzioni: $\dfrac{1}{x^\alpha|\log|x||^\beta}$, su ognuno dei domini $]0;\frac12]$, $[\frac12;1[$, $]1;\frac32]$, $[\frac32;+\infty[$.

ESERCIZIO n. 6 Si studi l'integrabilità, e quindi la convergenza degli integrali, delle seguenti funzioni sui rispettivi domini:

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x\log(1+\sqrt{x})}\ ,\quad x\in]0;1[\ ;\quad \frac{1-(\cos x)^{\frac14}\ +\ \log(1+x^{\frac12})}{(\sin x+1-e^{\frac{x}{2}})^{\frac12}}\ ,\quad x\in]0;1]\ ;$$

$$\frac{\arctan x}{((2x)^x-1)^2}\ ,\quad 0<x<\frac12\ ;\quad \frac{1}{\sin\frac1x}-\frac{1}{\log(x+1)-\log x}\ ,\quad x>1\ ;$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\text{arsin}x}\ ,\quad x\in]0;1[\ ;\quad \frac{1}{1-|\cos(x^\alpha)|}\ ,\quad x\in]0;\pi[\quad \text{(al variare del parametro } \alpha\in\mathbf{R}\text{)}\ .$$

ESERCIZIO n. 7

a) Si provi mediante integrazione per parti e confronto che $\frac{\sin x}{x}$ ha integrale in senso generalizzato su $]0;+\infty[$ finito.

b) Si provi che se $x\mapsto g(x)$ è una funzione defimita su $[0;+\infty[$, decrescente ed infinitesima per $x\to+\infty$, e quindi non negativa, allora la funzione $g(x)\sin x$ ha integrale in senso generalizzato su $[0;+\infty]$ finito.

c) Che dire sull'integrale generalizzato di $|g(x)\sin x|$?

ESERCIZIO n.8 Si studi l'integrabilità in senso generalizzato, ed eventualmente la convergenza degli integrali, su $]0;+\infty[$ delle funzioni $\sin(x^2)$, $\left(\sin\pi\left(x+\frac1x\right)\right)^2$ e $\sin\pi\left(x+\frac1x\right)$.

ESERCIZIO n. 9 Studiare il dominio e il comportamento asintotico agli estremi dello stesso delle seguenti funzioni $x\mapsto f(x)$:

$$\int_{2x-3}^{x+5}\frac{te^{t-1}}{2t-7}dt\ ;\quad \int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}dt\ ;\quad \int_0^{\tan x}\frac{\cos t}{1+t^2}dt\ .$$

ESERCIZIO n. 10 Posto $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, si studi il limite del rapporto $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, $x\to+\infty$, nei seguenti casi:

$$f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ ,\quad f(x)=e^x\ ,\quad f(x)=xe^{x^2}\ ,\quad f(x)=\log x\ .$$

ESERCIZIO n. 11 Si consideri $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, $\alpha>0$. Si provi che è ben definito e quindi che $\Gamma(n)=(n-1)!$ per $n\in\mathbf{N}$.

ESERCIZIO n. 12 Dati gli integrali $\frac{1}{3}T(\kappa) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{1-\kappa^2 t^2}}\, dt$ $\kappa \in [0;1[$.

a) Si calcoli $T(0)$ e si provi che per ogni $\kappa \in [0;1[$ tali integrali sono finiti.

b) Si studi al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il comportamento di $(T(\kappa) - T(0)) \cdot \kappa^{-\alpha}$ per $\kappa \to 0$.

ESERCIZIO 13 Si calcolino l'area superficiale laterale ed il volume del solido delimitato dalle seguenti figure di rotazione attorno all'asse specificato: grafico di $z = \sqrt{1+x^2}$ $0 \le x \le 1$, $x = y = 0$; grafico di $z = \sqrt{1+x^2}$ $0 \le x \le 1$, $z = y = 0$; $(x-1)^2 + y^2 = 4$ $x = y = 0$; $(x-1)^2 + y^2 = 4$ $z = y = 0$;

ESERCIZIO 14 -Si calcoli l'area del dominio "cartesiano" identificato dalle seguenti condizioni sulle coordinate polari $1 \le \rho\theta \le 2,\ \pi/4 \le \theta$.

- Si calcoli il volume della regione specificata dalle seguenti condizioni $x^2 + y^2 \le z^2 + 1 \le 2$.

ESERCIZIO 15 Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni sui domini specificati: $\sqrt{x^2+y^2}$ cerchio di centro l'origine e raggio unitario; $(\sin y)x \sin y^2 x^2$ triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$; $x+y+z$ cono di centro $(0,0,1)$ e base $x^2+y^2 = 1,\ z = 0$; $z^3 + xyz$, $z^2 \le x^2 + y^2 \le z$; $\frac{z}{x^2+y^2}$, $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le z \le 1$; ye^x, $0 \le y \le e^{-x}$ $0 \le x$; $x + 2y$ regione compresa tra il segmento $y = 0$, $0 \le x \le 2\pi$ e l'immagine della curva $(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

ESERCIZIO 16 Si dica se le seguenti funzioni hanno integrale finito nei domini rispettivamente specificati al variare degli eventuali parametri: $\frac{1}{x^4+y^4}$, $y^2 \le x^4 \le 5$; $(x^2+y^2+z^2)^2$, $x^2 + y^2 \le z^4$; $\frac{x^2 y^\alpha}{1-\cos x + \frac{y^2}{2}}$, quadrato di vertici $(0,0)$ $(1,0)$ $(1,1)$ $(0,1)$, $\alpha \in \mathbf{R}$; $\frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{2\alpha}}$ cerchio di raggio 5 e centro $(0,0)$, $\alpha > 0$; $\frac{1}{(|x|^\alpha+|y|^\alpha+|z|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$ $\max\{|x|,|y|,|z|\} \le 1$, $\alpha > 0$

ESERCIZIO 17 Considerando la funzione $f(x,y,z) = x^2y^2 + z^2y^2 + x^2z^2$, omogenea di grado 4 per cui $(x,y,z) \cdot \nabla f(x,y,z) = 4f(x,y,z)$, si calcoli il suo integrale sulla superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ESERCIZIO 18 - Si calcoli l'area della superficie ottenuta tracciando i segmenti congiungenti l'origine $(0,0,0)$ con i punti della curva $(t\cos t, t\sin t, t)$, $0 \le t \le 1$.

- Si calcoli l'area della superficie di $\mathbf{R}^4$ definita da $x^2 + y^2 = 1,\ z^2 + w^2 = 1$.
- Si scriva l'elemento d'area della superficie definita implicitamente da $e^{x+y+z} = 1 + x$.
- Si calcoli $\int_{0<z=xy,\ x^2+y^2\le R^2} \frac{z}{x^2+y^2} dVol_2$.
- Si integri yz^2 sulla regione bidimensionale definita da $x^2 + z^2 = a^2,\ 0 \le y \le b$.

ESERCIZIO 19 - La funzione $\frac{1}{x^4+y^4+z}$ ha integrale fnito su $x^3 + y^3 + 1 = z,\ x \ge 0,\ y \ge 0$?

- Si dica se l'integrale della funzione $\log(x^2+y^2+z^2)$ è finito su $z = \log(x^2+y^2) \le 0$.
- Si dica se l'area della superficie ottenuta ruotando attorno all'asse della x il luogo di zeri $e^z - e^{-x^2} = 1$ è finita o meno.
- Dire se la funzione $(x,y,z,w) \mapsto x^2y^2zw$ ha integrale finito sulla superficie definita implicitamente con le condizioni $(x^2+y^2)(z^2+w^2) = 1$, $x^2+y^2 \le 1$, $z,\ w \ge 0$.
- Si calcoli l'integrale in senso generalizzato della funzione $e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ su $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.