Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

Soluzione dell'esercizio 16c del II foglio di esercizi

ESERCIZIO n.16 a- Se f è misurabile su M di misura finita allora $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ [Si consideri prima il caso in cui $\|f\|_p < \infty$].

b- Sia M misurabile qualsiasi, se per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$, allora in M $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

c- Se M ha misura 1 e per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$ allora in M $\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp\left(\int_M \log|f|dm\right)$.

c-I Come visto nello svolgimento dell'esercizio 14 se $m(E) = 1$ allora $|f|_p \uparrow$ è crescente in p.

c-I.1 Si può supporre $f \neq 0$ in quanto per $p < s$:

$$\infty > |f|_s \geq |f|_p = \left(\frac{1}{m\{|f|>0\}} \int_{\{|f|>0\}} |f|^p dm\right) (m\{|f|>0\})^{\frac{1}{p}}$$

se $(m\{|f|>0\}) < 1$ si ha $\lim_{p\to 0^+} |f|_p = 0$, quindi da $m\{|f| = 0\} > 0$ si ha $\int \log|f|dm = -\infty$: da cui l'eguaglianza.

c-II Si assume quindi che $f \neq 0$.

c-II.1 Poichè per $p \leq s$ si ha $|f|^p \leq 1 \vee |f|^s$ per convergenza dominata $\lim_{p\to 0^+} \int |f|^p dm = m(M) = 1$

Quindi visto che $|f|_p = e^{\frac{1}{p}\log\int|f|^p dm}$ si osserva che l'esponente è il rapporto incrementale destro in $p = 0$ della funzione continua $G(p) = \log\int|f|^p dm,\ p > 0\ ;\quad G(0) = 0$.

c-II.2 Si tratta di mostrare che G è derivabile in 0, essendo $G'(0)$ eventualmente infinita, derivando sotto segno di integrale, usando i teoremi di convergenza, per cui $\lim_{p\to 0^+} |f|_p = e^{\int \log|f|dm}$.

Per studiare la derivabilita di G in $p = 0$ basterà studiare la derivabiltà in $p = 0$ dell'argomento del logaritmo $H(p) = \int |f|^p dm$, continuo con $H(0) = 1$.

c-II.3 Che tale derivata non sia $+\infty$ si deduce osservando che $(\log|f|) \vee 0$ è sommabile per concavità del logaritmo usando la diseguaglianza di Jensen:

$$\int_{\{|f|\geq 1\}} \log|f|dm \leq \frac{1}{s}\frac{1}{m(\{|f|\geq 1\})}\int_{\{|f|\geq 1\}} \log|f|^s dm \leq \frac{1}{s}\log\frac{1}{m(\{|f|\geq 1\})}\int |f|^s dm < +\infty$$

La funzione $Y(p) = y^p$, $y > 0$, è convessa. Quindi $R(p) = \frac{y^p - 1}{p}$ è crescente e per $0 < p < s$ e $p_n \downarrow 0$:

$$\text{se} \quad |f| \geq 1: \quad \frac{|f|^s - 1}{s} \geq \frac{|f|^p - 1}{p} \to \log|f| \geq 0$$

$$\text{se} \quad |f| < 1: \quad 0 < \; -\frac{|f|_n^p - 1}{p_n} \uparrow -\log|f|$$

Quindi per convergenza dominata $\displaystyle\int_{\{|f|\geq 1\}} \frac{|f|^p - 1}{p} dm \to \int_{\{|f|\geq 1\}} \log|f|dm < +\infty$

per Beppo Levi invece $\displaystyle 0 \geq \int_{\{|f|<1\}} \frac{|f|^p - 1}{p} dm \to \int_{\{|f|<1\}} \log|f|dm \geq -\infty$