Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XVI foglio di esercizi: Jacobiani, orientazione.

Legenda: • esercizi più impegnativi, ◦ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌢ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

09Ex1E7 Si consideri la mappa $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C^2}$ data da $f(z) := (z^2, z^3)$.
a) Dimostrare che f è iniettiva e propria, e che $\nabla f(z)$ ha rango massimo per ogni $z \neq 0$.
b) Calcolare lo Jacobiano di f. c) Dire se $f(\mathbf{C})$ è una superficie regolare oppure no.
[Osservazione: dove necessario si identifica $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R^2}$ e $\mathbf{C^2}$ con $\mathbf{R^4}$; con "superficie regolare" si intende una superficie senza bordo di classe C^∞ e dimensione 2 in $\mathbf{R^4}$].

• 12C2E6 a) Sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbf{R^2} \times \mathbf{R^3}$ tali che $|y|(1 + |x|^2) = 1$. Dimostrare che S è una superficie senza bordo, chiusa ma non compatta, di classe C^∞ e dimensione 4.
b) Sia $g : \mathbf{R^2} \times \mathbf{S^2} \to \mathbf{S}$ data da $g(s, t) := (s, (1 + |s|^2)^{-1}t)$. Calcolare dg ed il suo Jacobiano.
c) Dimostrare che g è una buona parametrizzazione di S.

09Ex5E7 Sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbf{R^2} \times \mathbf{R^2}$ tali che $(|x|, |y|) \in C$ dove C è una curva (nel senso di superfice di dimensione 1) di classe C^1 contenuta in $(0, +\infty)\times(0, +\infty)$, compatta e senza bordo.

a) Mostrare che S è una superfice C^1 di dimensione 3, compatta e senza bordo.

b) Calcolare il volume di S a partire da una parametrizzazione γ di C.

11C2E5 Sia $g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ la mappa data da $g(t, u) := ((2 + \cos t) \cos u, (2 + \cos t) \sin u, \sin t)$.

a) Dimostrare che $S := g(\mathbf{R^2})$ è una superficie compatta, senza bordo e di classe C^∞ in $\mathbf{R^3}$, esibendo sia un'equazione che delle parametrizzazioni.

b) Calcolarne l'area di S.

• 11Ex2E7 a) Sia V una matrice $n \times n$ tale che la prima colonna v è ortogonale a tutte le altre, e sia W la matrice $n \times (n - 1)$ ottenuta eliminando la prima colonna di V. Dimostrare

$$|\det V| = |v|\sqrt{\det(W^tW)}\,.$$

b) Sia D un insieme compatto e convesso con frontiera di classe C^1 in $\mathbf{R^n}$ tale che 0 è un punto interno di D, e dato $r > 0$ poniamo $D(r) := \{rx : x \in D\}$. Sia inoltre $f : D(r) \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dimostrare che se D è la palla di raggio 1 centrata nell'origine allora

$$\int_{D(r)} f(x)\, dx = \int_0^r \rho^{n-1}\Big[\int_{\partial D} f(\rho x)\, d\sigma_{n-1}(x)\Big]\, d\rho\ .$$

[Suggerimento: usare (e magari dimostrare) che esiste una mappa $g : \mathbf{R^{n-1}} \to \mathbf{R^n}$ di classe C^1 ed un insieme misurabile E in $\mathbf{R^{n-1}}$ tale che g è una bigezione da E in ∂D].

c) Cosa succede se D è una palla di raggio 1 ma non è centrata nell'origine?

$\frown$, $\circ$ 12C2E7 a) Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione d. Com'è noto, se $\beta = (v_1, \ldots, v_d)$ è una base di V come spazio vettoriale complesso, allora $\beta' := (v_1, iv_1, \ldots, v_d, iv_d)$ è una base di V come spazio vettoriale reale. Dimostrare che date due basi complesse β e $\tilde{\beta}$, allora le corrispondenti basi reali β' e $\tilde{\beta}'$ hanno la stessa orientazione.

b) Sia S una superficie di dimensione $2d$ in $\mathbf{C^n}$ con $0 < d \leq n$ (per definire le superfici identifichiamo $\mathbf{C^n}$ con $\mathbf{R^{2n}}$). Dimostrare che se $Tan(S, x)$ è un sottospazio *complesso* di $\mathbf{C^n}$ per ogni $x \in S$ allora S è orientabile.

$\circ$, $\frown$, $\bullet$ Sia S la superfice senza bordo di dimensione d definita da $f(x) = 0$, dove $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^{n-d}}$ è una mappa di classe C^1 con differenziale, in ogni punto di S, di rango massimo. Dimostrare che S è orientabile.

11Ex5E4 Sia S la semisfera data dai punti $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3}$ tali che $|x| = 1$ e $x_3 \geq 0$. Supponiamo che S sia orientata in modo tale che $[e_1, e_2]$ è l'orientazione dello spazio tangente a S nel punto $p_0 := (0, 0, 1)$. Scrivere l'orientazione dello spazio tangente a ∂S nel punto $p_1 := (1, 0, 0)$.

12Ex4E3 Sia D il disco aperto di centro 0 e raggio 1 in $\mathbf{R^n}$ e sia $f : D \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ un funzione del tipo

$$f(x) := |x|^{-\alpha} g(x)$$

con $\alpha > 0$ e $g \in C^1(\mathbf{R^n})$ tale che $g(0) \neq 0$.
Per quali α il volume n-dimensionale del grafico di f è finito?

12Ex5E8ab Sia S l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbf{R^3}$ tali che $x^2 + y^2 + 2z(1 + z^2) exp(x^2 - y^2) = 4$ e $z \geq 0$.
a) Dimostrare che S è una superficie con bordo di classe C^∞, compatta, connessa, orientabile.
b) Si orienti S in modo tale che l'orientazione di $Tan(S, p)$, $p = (0, 0, 1)$, sia data da $[(1, 0, 0), (01, 0)]$.
