Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XII foglio di esercizi: le prime proprieta' della trasformata di Fourier e il calcolo

---

Legenda: $\bullet$ esercizi più impegnativi, $\circ$ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

ESERCIZIO n.1 a- Calcolare $\widehat{\left(\frac{1}{4+x^4}\right)}$. b- Che regolarità ha la trasformata?

09C1E1 Calcolare la trasformata di Fourier di $x^n e^{-|x|}$ con n intero positivo.

09C1E3 Dati $a,\ b > 0$ calcolare $N_a * N_b$, ove $N_s(x) := exp\left(-\dfrac{x^2}{2s^2}\right)$.

09Ex4E2 Calcolare la trasformata di Fourier di $e^{-a|x|}$ per ogni $a > 0$.

09Ex2E2, 11Ex1E2 Calcolare la trasformata di Fourier di $h(x) := e^{-|x|}\cos x$.

11C1E2 Calcolare la trasformata di Fourier di $\frac{\sin x}{1+x^2}$.

11Ex2E2 Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \frac{1}{5+2x+x^2}$.

ESERCIZIO n. 2 Si calcoli la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni sommabili $\chi_{[-A;A]}$, $\frac{1}{(x+a)^2+b^2}$, $\chi_{[0;+\infty[}(x)\exp(-k|x|)\ \ k > 0$.

11Ex5E1 Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := x^2 e^{-|2x|}$.

12C1E1 Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := e^{4x-2x^2}$.

12Ex1E1 Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \frac{\cos x}{1+x^2}$.

12Ex2E4 Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \frac{x}{x^4+4}$.

11Ex3E1 Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := (1-x^2)\exp(-x^2/2)$

09Ex5E3 Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \sin^2 x/x^2$. [Suggerimento: Può essere utile ricordare che $\sin x/x$ è una trasformata di Fourier nota].

ESERCIZIO n.3 Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+a^2x^2}\cdot\frac{1}{1+b^2x^2}dx$

$\bullet$ ESERCIZIO n. 4 Calcolare la trasformata di Fourier di $\frac{1}{\cosh x}$.

12Ex5E2 Trovare i polinomi di secondo grado p per cui la funzione $f(x) := p(x)\exp\,(-\frac{x^2}{2})$soddisfa $\widehat{f} = -\sqrt{2\pi} f$.

09C1E4 Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine che ammetta come soluzione $u(x) := \exp(-x^4/4)$, e scrivere l'equazione (differenziale lineare omogenea) corrispondente per la trasformata di Fourier $\hat{u}$.

ESERCIZIO n. 5 Provare direttamente che se $f,\ g \in L^1$ si ha $\displaystyle\int f(x)\cdot \widehat{g}(x)dx = \int \widehat{f}(x)\cdot g(x)dx$.

09Ex2E1 Siano f, g funzioni reali e continue su $\mathbf{R}$ tali che f è di classe C^1 e 2π-periodica, e $g \in L^1$. Scrivere la trasformata di Fourier del prodotto $f \cdot g$ in termini dei coefficienti di Fourier (complessi) di f e della trasformata di Fourier di g.

ESERCIZIO n.6 (Stime uniformi per Riemann-Lebesgue) Se $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ allora

$$\left|\widehat{f}(\omega)\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi\omega}{|\omega|^2}\right)\right| dx.$$

12C1E3 Sia f una generica funzione continua nello spazio complesso $L^1(\mathbf{R})$ tale che $|f(x)| \sim |x|^{-a}$ per $x \to \pm\infty$. Per quali a si può dire che $\widehat{f}$ è di classe C^2?

12Ex3E2 Dimostrare che una funzione in $L^1(\mathbf{R})$ *a valori reali* è univocamente determinata dalla restrizione della sua trasformata di Fourier alla semiretta $[0, +\infty)$.

• 09C1E8 Sia p un polinomio reale di grado $d \geq 2$ con zeri semplici e non reali. Dimostrare che la trasformata di Fourier di $1/p(x)$ è una funzione di classe C^∞ su $\mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

11Ex1E7 a) Dimostrare che $C_c^\infty(\mathbf{R})$ è denso in $C_0(\mathbf{R})$ dotato della norma del sup.
b) Sia $F : L^1(\mathbf{R}) \to \mathbf{C_0}(\mathbf{R})$ la trasformata di Fourier: dimostrare che l'immagine di F è densa in $C_0(\mathbf{R})$.

• 12C1E8 Dati $a > 0$, siano f_1 ed f_2 funzioni in $L^2(\mathbf{R})$ con supporto contenuto in $[-\pi a, \pi a]$ tali che

$$\widehat{f}_1(n) = \widehat{f}_2(n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{Z}.$$

Dimostrare che se $a \leq 1$ allora $f_1 = f_2$ q.o. Cosa succede se $a > 1$?

11Ex4E1 Sia $g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{C}$ una funzione della forma $g(x_1, x_2) = g_1(x_1)\, g_2(x_2)$ con $g_1, g_2 \in L^1(\mathbf{R})$. Scrivere la trasformata di Fourier di g in termini di quelle di g_1 e g_2.

09Ex1E8 Data A matrice $n \times n$ reale, simmetrica e definita positiva, si definisca

$$f(x) := \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle Ax; x\rangle\Big) \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R^n}$$

a) Calcolare la trasformata di Fourier di f nel caso in cui A è diagonale.
b) Calcolare la trasformata di Fourier di f per A qualunque.

11C1E3 a) Sia f una funzione in $L^1(\mathbf{R^n})$ e A una matrice $n \times n$ invertibile. Esprimere la trasformata di Fourier di $f(Ax)$ in termini di quella di f.
b) Dimostrare che se f è una funzione radiale allora anche $\widehat{f}$ lo è.