Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

VIII foglio di esercizi: applicazioni delle serie di Fourier

Testi da cui si è preso spunto: H.Dym H.P.Mc Kean "Fourier series and integrals":Ch. 1. A.A.Kirillov A.D.Gvisiani "Teoremi e problemi dell'analisi funzionale":es. 645-650, 652, 653. A.Zygmund K.L. Wheeden "Measureand Integral" Ch. 12.1-12.3; M.Reed B. Simon "Methods of modern Mathematical Physics,, Vol 1 cap. 1, 2;
H.F.Weinberger "A first course in Partial Differential Equations with complex variables and transform methodods": Ch. IV, V, VI, VII.
S.Salza G.Verzini "Equazioni a derivate parziali: complementi ed esercizi": cap 2.2.1: pb. n.2.1-2.3, 2.5, 2.6, 2.8; cap 2.2.3: pb. 2.18; cap 2.2.5 pb.2.24, 2.25; cap 2.3: es.3.3, 3.4, 3.6; cap. 4.2.1: pb. 2.1, 2.5, 2.10; cap. 4.3: es. 3.1-3.5.

Legenda: • esercizi più impegnativi, ∘ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌒ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

--- ⌒

ESERCIZIO n.1 a- Si trovi l' espressione formale della soluzione periodica dell'equazione del calore in termini di sviluppo trigonometrico in seni e coseni del dato iniziale.
b- Si trovi l' espressione formale della soluzione periodica dell'equazione delle onde in termini di sviluppo trigonometrico in seni e coseni dei dati iniziali.

ESERCIZIO n.2 Si trovino eventuali soluzioni per i seguenti problemi ai dati iniziali.

$$a-\begin{cases} \partial_t u(t,x) \;=\; \partial_{xx}u(t,x) \quad t>0,\ x\in\mathbf{R} \\[2ex] u\in C^2(]0;+\infty[\times\mathbf{R}) \\[2ex] u\in C([0;+\infty[\times\mathbf{R}) \\[2ex] u(0,x)=\cos x \qquad\qquad x\in\mathbf{R} \end{cases}$$

$$b-\begin{cases} \partial_t u(t,x) \;=\; \partial_{xx}u(t,x) \qquad t>0,\ x\in[0;2\pi] \\[2ex] u(t,0)=u(t,2\pi), \\ \partial_x u(t,0)=\partial_x u(t,2\pi) \\[2ex] u\in C^\infty([0;+\infty[\times[0;2\pi]) \\[2ex] u(0,x)=(\cos x)^2 \qquad\qquad x\in[0;2\pi] \end{cases}$$

$$c-\begin{cases} u_t(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x) \\[2ex] u\in C([0;+\infty[\times[0;2]) \\ u\in C^\infty(]0;+\infty[\times[0;2]) \\ \text{per}\quad t>0 \quad \text{periodica in} \quad x \\[2ex] u(0,x)=1-|x-1| \quad x\in[0;2] \end{cases}$$

$$d-\begin{cases} u_t(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x)+e^{-t}\sin x \\[2ex] u(t,0)=u(t,2\pi), \\ u_x(t,0)=u_x(t,2\pi) \\[2ex] u\in C^2([0;+\infty[\times[0;2\pi]) \\[2ex] u(0,x)=9, \quad x\in[0;2\pi] \end{cases}$$

NOTA: il problema con dato iniziale nullo per il calore non ha unicità in $C^\infty([0;\infty[\times\mathbf{R})$:

$$u(t,x) \;=\ll \left[\cosh x\sqrt{\frac{d}{dt}}\right]\psi(t) \gg=: \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\frac{d^m\psi}{dt^m}(t) \quad , \qquad \psi(t) =: e^{-\frac{1}{t^2}},\ \psi(0)=0$$

In particolare il problema a) non ha unica soluzione regolare.

ESERCIZIO n. 3 Si trovino eventuali soluzioni per i seguenti problemi ai dati iniziali.

$$a-\begin{cases} u_{tt}(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x) & t,\ x\in\mathbf{R} \\ \\ u\in C^\infty([0;+\infty[\times\mathbf{R}) & \\ \\ u(0,x)=\cos x & x\in\mathbf{R} \\ u_t(0,x)=\cos x & x\in\mathbf{R}\end{cases}$$

$$b-\begin{cases} u_{tt}(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x), \quad t\in\mathbf{R},\ x\in[-\pi;\pi] & \\ \\ u(t,-\pi)=u(t,\pi), \quad u_x(t,-\pi)=u_x(t,\pi) & \\ \\ u\in C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}) & \\ \\ u(0,x)=0, & x\in[-\pi;\pi] \\ u_t(0,x)=(\sin x)^3, & x\in[-\pi;\pi]\end{cases}$$

12Ex5E6 Data $u_0\in C^1_{\rm per}(\mathbf{R})$ si consideri il problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) \;=\; u_{xx}(t,x)+2u(t,x) & t>0,\ x\in]-\pi;\pi[\\ \\ u(t,-\pi)=u(t,\pi) & t>0 \\ \\ u_x(t,-\pi)=u_x(t,\pi) & x\in]-\pi;\pi[\\ \\ u(0,x)=u_0(x) & x\in]-\pi;\pi[\end{cases}$$

a) Risolvere il problema per $u_0(x)=\cos x$. b) Per quali u_0 la soluzione è limitata?

11C1E6 a) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di $4\sin^2 x$.
b) Per $u_0(x):=4\sin^2 x$ trovare una soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{ttt}=2u_{xx} \\ \\ u(\cdot,-\pi)=u(\cdot,\pi)\ , \quad u_x(\cdot,-\pi)=u_x(\cdot,\pi) \\ \\ u(0,\cdot)=u_0(\cdot)\ , \quad u_t(0,\cdot)=u_{tt}(0,\cdot)=0\end{cases}$$

c) Discutere l'unicità della soluzione trovata al punto precedente.

d) Dire se il problema ammette soluzione per ogni $u_0:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ di classe C^∞ e 2π-periodica.

• 12C1E6 Data una funzione $u_0\in C^\infty_{\rm per}$, consideriamo l'insieme D dei numeri $d>0$ tali che il seguente problema ammette una soluzione definita in $(-d,0]\times[-\pi,\pi]$:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} \\ u(\cdot,-\pi)=u(\cdot,\pi)\ , \quad u_x(\cdot,-\pi)=u_x(\cdot,\pi) \\ u(0,\cdot)=u_0(\cdot)\end{cases}$$

a) Detti c_n i coefficienti di Fourier di u_0, si ha $D=(0,d^*]$ con $d^*:=-\limsup_{n\to\pm\infty}\frac{\log|c_n|}{n^2}$
b) Dimostrare che se $d^*>0$ allora u_0 è della forma $u_0(x)=f_1(e^{ix})+f_2(e^{-ix})$ con f_1,f_2 funzioni olomorfe su $\mathbf{C}$; dare un esempio di funzione u_0 analitica per cui $d^*=0$.

09Ex1E6Sia X lo spazio delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue e 2π-periodiche, ed indichiamo come al solito con $c_n(f)$ i coefficienti di Fourier complessi di una funzione $f \in X$. Definiamo il prodotto di convoluzione di due funzioni $f, g \in X$ come

$$f * g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

a) Calcolare i coefficienti di Fourier di $f * g$ a partire da quelli di f e di g.
b) Dimostrare che $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
c) Presa $g \in X$ e $u_0 \in X \cap C^1$, trovare una soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t = g * u - u & \text{in } \mathbf{R} \times [-\pi, \pi], \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) & \text{per } t \in \mathbf{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{$*$}$$