

Elementi di topologia in \mathbb{R}^n

INSIEMI COMPATTI

Definizione 1. Diciamo che un insieme $K \subset \mathbb{R}^d$ è **compatto per successioni** se ogni successione $X_n \in K$ ammette una sottosuccessione convergente che ha come limite un punto di K .

Teorema 2. Sia K un sottoinsieme di \mathbb{R}^d . Allora sono equivalenti le affermazioni seguenti.

- (i) K è chiuso e limitato;
- (ii) K è compatto per successioni.

Dimostrazione. (ii) \Rightarrow (iii). Sia X_n una successione in K . Siccome K è limitato, lo è anche la successione X_n . Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione X_{n_k} convergente ad un qualche $X_\infty \in \mathbb{R}^n$. Siccome K è chiuso $X_\infty \in K$.

(iii) \Rightarrow (ii). Per assurdo, se K fosse illimitato esisterebbe una successione di punti $X_n \in K$ tale che $|X_n| \geq n$. Allora X_n non ammette sottosuccessioni convergenti. Contraddizione con (iii). Quindi K è limitato. Dimostriamo ora che K è chiuso (per successioni). Sia $X_n \in K$ una successione convergente ad un certo $X_\infty \in \mathbb{R}^d$. Per (iii) X_n ammette una sottosuccessione X_{n_k} convergente ad un punto di K . Ma siccome la successione X_n converge, anche la successione X_{n_k} converge ed ha lo stesso limite. Quindi $X_\infty \in K$. □

Esercizi teorici

Esercizio 3. Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^d$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^d$ due insiemi compatti per successioni. Dimostrare che $K_1 \cap K_2$ e $K_1 \cup K_2$ sono compatti per successioni.

Esercizio 4. Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto per successioni e $C \subset \mathbb{R}^d$ un chiuso. Dimostrare che $K \cap C$ è un compatto per successioni. È vero che anche $K \cup C$ è un compatto per successioni.?

Esercizio 5. Siano $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto per successioni e $A \subset \mathbb{R}^d$ un aperto. Dimostrare che $K \setminus A$ è un compatto per successioni.

Esercizio 6. Siano $K_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi compatti per successioni. Dimostrare che l'insieme $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{m+n}$ è compatto per successioni.

Esercizio 7. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un compatto per successioni. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la sezione verticale

$$S_a = \{(x, y) \in K : x = a\},$$

è un compatto per successioni.

Esercizio 8. Dimostrare che, dato un insieme K compatto per successioni, anche la sua frontiera ∂K è un insieme compatto per successioni.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Teorema 9 (Teorema di Weierstrass in \mathbb{R}^n). *Sia K un insieme compatto per successioni in \mathbb{R}^n . Sia $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, F ammette un massimo ed un minimo su K .*

Esercizi teorici

Esercizio 10 (Teorema di Weierstrass). *Sia K un sottoinsieme di \mathbb{R}^n compatto per successioni. Sia $F : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Mostrare che anche l'insieme $F(K)$ è compatto.*

Esercizio 11 (Diametro di un insieme compatto). *Sia K un sottoinsieme compatto per successioni e non vuoto di \mathbb{R}^n . Dimostrare che esistono due punti $X \in K$ e $Y \in K$ che realizzano il massimo*

$$\max \{ |X - Y| : X \in K, Y \in K \}.$$

Esercizio 12. *Sia C un insieme chiuso e non vuoto in \mathbb{R}^n . Dimostrare che per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ esiste $Y \in C$ che realizza il minimo*

$$\text{dist}(X, C) = \min \{ |Y - X| : Y \in C \}.$$

UNIFORME CONTINUITÀ E TEOREMA DI CANTOR

Definizione 13 (Uniforme continuità). *Siano Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione data. Diciamo che F è uniformemente continua su Ω , se:*

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

se $X, Y \in \Omega$ sono tali che $|X - Y| < \delta$, allora $|F(X) - F(Y)| < \varepsilon$.

Esempi di funzioni uniformemente continue

Esempio 14. *La funzione $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta(X) = |X|$ è uniformemente continua su \mathbb{R}^n .*

Esempio 15. *La funzione $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $S(X) = |X|^2$ NON è uniformemente continua su \mathbb{R}^n .*

Esempio 16. *La funzione $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x, y) = x + y^2$ è uniformemente continua su*

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1 \}.$$

Teorema di Cantor

Teorema 17 (Teorema di Cantor in \mathbb{R}^n). *Sia K un insieme compatto in \mathbb{R}^n e sia $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su K . Allora, F è uniformemente continua su K .*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono due punti $X_n \in K$ e $Y_n \in K$ tali che

$$|X_n - Y_n| < \frac{1}{n}, \quad \text{ma} \quad |F(X_n) - F(Y_n)| \geq \varepsilon.$$

Siccome \mathcal{K} è compatto esiste una sottosuccessione X_{n_k} di X_n convergente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k} = X_\infty \in \mathcal{K}.$$

Inoltre, abbiamo ancora che

$$|X_{n_k} - Y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \quad e \quad |F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})| \geq \varepsilon.$$

In particolare, anche la successione Y_{n_k} converge a X_∞ . Ora, per la continuità di F si ha

$$\varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})| = |F(X_\infty) - F(X_\infty)| = 0.$$

Assurdo.

□