Corsi SSIS - Pisa 2007/08

Prova scritta del 11/04/2008

MOTIVARE LE RISPOSTE IN MANIERA ESAURIENTE

(1) Siano A, B insiemi e $f : A \longrightarrow B$. Dimostrare che:
per ogni $A_1,\ A_2 \subset A$ risulta $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ se e solo se f è *iniettiva.*

(2) Dire se la seguente implicazione è sempre vera:

$$\{r \wedge [(p \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg\, r]\} \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$$

(3) Mediante il principio di induzione dimostrare la seguente proposizione.
Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k\, -\, 2^{k-1}\,(k-1)}{(k+1)!} \; = \; \frac{2^n - 1}{(n+1)!}.$$

(4) Dimostrare che se $a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}$, allora
$a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ se e solo se $a = b = c = 0$

(5) Si considerino gli insiemi $P_1 = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ e $P_2 = \{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$ dire se $(P_1, \cdot)$, $(P_2, \cdot)$ sono gruppi abeliani in $\mathbb{Z}_{10}$.

(6) Si consideri l'insieme $C = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$. Dimostrare che $(C, +, \cdot)$ è un corpo in $\mathbb{Z}_{14}$ e che risulta isomorfo a $\mathbb{Z}_7$.

Punteggio: ogni esercizio svolto correttamente vale sei punti.

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1) Siano A, B insiemi e $f : A \longrightarrow B$. Dimostrare che:
per ogni A_1, $A_2 \subset A$ risulta $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ se e solo se f è *iniettiva.*

Soluzioni.
Dimostriamo che se per ogni A_1, $A_2 \subset A$ risulta $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ allora f è *iniettiva.*

Per assurdo: se f non fosse iniettiva allora esiterebbero x_1, $x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$, in tal caso, posto: $A_1 = \{x_1\}$ e $A_2 = \{x_2\}$ si avrebbe
$f(A_1) \cap f(A_2) \neq \varnothing$ perché $f(x_1) = f(x_2)$, mentre $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ (perché $x_1 \neq x_2$) e quindi $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$.

Viceversa, sia f iniettiva. Osserviamo che vale l'inclusione
$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, perché se $y \in f(A_1 \cap A_2)$ allora esiste $x \in A_1 \cap A_2$ tale che $y = f(x)$ quindi $y \in f(A_1)$ in quanto $x \in A_1$ e $y \in f(A_2)$ perché $x \in A_2$, onde $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.
Resta da verificare l'inclusione $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.
Consideriamo $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ e $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ tali che $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2)$. Essendo f iniettiva deve essere $x_1 = x_2$ e quindi $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$, onde $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

(2) Dire se la seguente implicazione è sempre vera:

$$\{r \wedge [(p \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg r]\} \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$$

Soluzioni.
Possiamo procedere in due modi: mediante la tabella delle verità, applicando la definizione dei connettivi logici usati. Iniziamo con la tabella delle verità, ponendo
$S :\ [p \wedge \neg q] \Rightarrow \neg r,$
$T :\ r \wedge \{[p \wedge \neg q] \Rightarrow \neg r\},$
$U :\ p \Rightarrow q.$
$P :\ \{r \wedge [(p \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg r]\} \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg q$	S	T	U	P
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

Dimostriamo la proposizione mediante le definizioni dei connettivi logici.

$$\begin{aligned} &\{r \wedge [(p \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg r]\} \Longrightarrow (p \Longrightarrow q) \iff \\ \iff\ &\neg\{r \wedge [(p \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg r]\} \vee (p \Longrightarrow q) \iff \\ \iff\ &\neg r \vee \neg[(p \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg r] \vee (\neg p \vee q) \iff \\ \iff\ &\neg r \vee \neg[\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r] \vee (\neg p \vee q) \iff \\ \iff\ &[\neg r \vee \neg p \vee q] \vee \neg[\neg p \vee q \vee \neg r] \end{aligned}$$

che risulta sempre vera.

(3) Mediante il principio di induzione dimostrare la seguente proposizione.
Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k \,-\, 2^{k-1}\,(k-1)}{(k+1)!} \;=\; \frac{2^n - 1}{(n+1)!}.$$

Soluzioni.
Per $n = 1$ è ovvia. Verifichiamo l'induttività della proposizione.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k \,-\, 2^{k-1}\,(k-1)}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k \,-\, 2^{k-1}\,(k-1)}{(k+1)!} \;+\; \frac{n+1-2^n\cdot n}{(n+2)!} = \quad \text{(ipotesi induttiva)}\\ &= \frac{2^n-1}{(n+1)!} + \frac{n+1-2^n\cdot n}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left[2^n - 1 + \frac{n+1-2^n\cdot n}{n+2}\right] =\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n2^n \,-\, n \,+\, 2^{n+1} \,-\, 2 \,+\, n \,+\, 1 \,-\, 2^n\cdot n}{n+2} = \frac{2^{n+1}-1}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

(4) Dimostrare che se a, b, $c \in \mathbb{Q}$, allora
$a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ se e solo se $a = b = c = 0$

Soluzione.
Se $a = b = c = 0$ è ovvio. Viceversa sia $a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$.
Se $c = 0$ e $b \neq 0$ allora si ha $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b}$, assurdo. In maniera altrettando semplice si arriva all'assurdo se $b = 0$ oppure $a = 0$. Siano quindi tutti e tre i parametri diversi da zero. Dalla relazione

$$\sqrt[3]{4} = -\frac{a}{c} \;-\; \frac{b}{c}\sqrt{2},$$

posto

$$\alpha = -\frac{a}{c} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{b}{c},$$

segue

$$\sqrt[3]{4} = \alpha + \beta\sqrt{2}.$$

Elevando alla terza potenza e semplificando otteniamo

$$\sqrt{2} \;=\; \frac{4 \,-\, 6\,\alpha\,\beta^2 \,-\, \alpha^3}{3\,\alpha^2\,\beta \,+\, 2\beta^3}$$

che è un assurdo. Osserviamo che, in particolare, risulta $\beta(3\alpha^2 + 2\beta^2) \neq 0$.

(5) Si considerino gli insiemi $P_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $P_2 = \{1, 3, 7, 9\}$ dire se $(P_1, \cdot)$, $(P_2, \cdot)$ sono gruppi abeliani in $\mathbb{Z}_{10}$.

Soluzione.

Costruiamo la tabella delle operazioni relative a $(P_1, \cdot)$.

$\cdot$	1	3	5	7	9
1	1	3	5	7	9
3	3	9	5	1	7
5	5	5	5	5	5
7	7	1	5	9	3
9	9	7	5	3	1

Come si può vedere $(P_1, \cdot)$ non è un gruppo in quanto ogni termine moltiplicato per 5 dà 5, di conseguenza, l'elemento 5 non ha opposto (si osservi che l'elemento neutro del gruppo è 1).
Costruiamo la tabella delle operazioni relative a $(P_2, \cdot)$.

$\cdot$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

In questo caso osserviamo che sono verificate le proprietà che definiscono un gruppo. In particolare 1 è l'elemento neutro del gruppo, mentre l'opposto di 3 è 7, mentre l'opposto di 9 è 9.

(6) Si consideri l'insieme $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Dimostrare che $(C, +, \cdot)$ è un corpo in $\mathbb{Z}_{14}$ e che risulta isomorfo a $\mathbb{Z}_7$.

Soluzione

Costruiamo le tabelle delle operazioni.

$\cdot$	0	2	4	6	8	10	12
0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	12	2	6	10
4	0	8	2	10	4	12	6
6	0	12	10	8	6	4	12
8	0	2	4	6	8	10	2
10	0	6	12	4	10	2	8
12	0	10	6	2	12	8	4

$+$	0	2	4	6	8	10	12
0	0	2	4	6	8	10	12
2	2	4	6	8	10	12	0
4	4	6	8	10	12	0	2
6	6	8	10	12	0	2	4
8	8	10	12	0	2	4	6
10	10	12	0	2	4	6	8
12	12	0	2	4	6	8	10

Definiamo l'applicazione $\psi : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow (C, +, \cdot)$ nel modo seguente:

$$\psi(0) = 0; \quad \psi(1) = 8, \quad \psi(2) = 2, \quad \psi(3) = 10, \quad \psi(4) = 4, \quad \psi(5) = 12, \quad \psi(6) = 6.$$

Si verifica facilmente che si tratta di un isomorfismo.