

CAPITOLO PRIMO

CENNI DI LOGICA

E

TEORIA ELEMENTARE DEGLI INSIEMI

1 Proposizioni e connettivi logici

Una *proposizione* (che sarà generalmente indicata con una lettera corsiva maiuscola $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \dots$) è una frase dichiarativa di senso compiuto che possa esser riconosciuta come "*vera*" o "*falsa*". Questo riconoscimento può anche non essere immediato da stabilire (in matematica è quello che si chiama *dimostrazione*), ma l'affermazione non deve presentare ambiguità né alternative. ⁽¹⁾ La proposizione si regge sul gruppo fondamentale: *soggetto + predicato*, sufficiente da solo per formare una proposizione (frase minima). In ogni caso il suo elemento fondamentale è il verbo. Ad esempio, sono proposizioni

\mathcal{A} : *il cane è un animale,*

\mathcal{B} : $2 = 1,$

\mathcal{C} : *i triangoli hanno tre lati,*

mentre non lo sono

\mathcal{D} : *Il cane,*

\mathcal{E} : *che ore sono?*

\mathcal{F} : *se $2 = 1,$*

\mathcal{G} : *Non fumare!*

\mathcal{H} : *Io sono bugiardo.* ²

Le proposizioni possono essere legate tra loro dando luogo ad una struttura più complessa; usando i cosiddetti *connettivi logici*; tra questi i più elementari sono i seguenti:

"e"	"o"	"non"
(coniunzione)	(disgiunzione)	(negazione)

¹Principio di non contraddizione: *un enunciato non può essere contemporaneamente vero o falso*. Principio del terzo escluso: *un enunciato è vero o falso, non esiste una terza possibilità* (tertium non datur). Nel linguaggio corrente è possibile trovare frasi che non rispettano questi principi (vedi l'esempio della nota successiva).

²Infatti (eccetto la \mathcal{H}) non sono frasi dichiarative. La \mathcal{H} è una frase dichiarativa di senso compiuto, ma non si può stabilire se è vera o falsa. Se infatti è vero che sono bugiardo, la frase è vera, ma mentre la dico non sto mentendo e quindi non sono bugiardo; se invece non è vero che sono bugiardo, la frase è falsa, ma mentre la dico sto mentendo e quindi sono bugiardo.

I primi due sono detti anche binari perché si applicano a due proposizioni, mentre il terzo si applica solo ad una. Per quanto riguarda le notazioni, il connettivo "e" può essere indicato con il simbolo \wedge , il connettivo "o" con il simbolo \vee ; per la negazione, accanto alla forma *non* \mathcal{P} si possono usare le scritte $\overline{\mathcal{P}}$, $\overline{\mathcal{P}}$ o $\neg\mathcal{P}$.

Per definizione

" $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ " è vera se e solo se sono vere *entrambe*;
 " $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ " è vera se e solo se è vera *almeno una* delle due;
 " $\neg\mathcal{P}$ " è vera se e solo se è falsa \mathcal{P} ;
 \mathcal{P} è vera se e solo se è falsa " $\neg\mathcal{P}$ ".

Ad esempio dalle proposizioni

\mathcal{P} : splende il sole
 \mathcal{Q} : soffia il vento forte,

otteniamo

" $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ ": splende il sole e soffia il vento forte
 " $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ": splende il sole o soffia il vento forte
 " $\neg\mathcal{P}$ ": non splende il sole.

Nel caso disgiuntivo affermiamo che si realizza almeno una delle due condizioni atmosferiche, senza escludere la possibilità che siano entrambe vere. La disgiunzione logica deve dunque essere interpretata in senso debole, mentre nel linguaggio comune esiste anche la disgiunzione forte che esclude la possibilità che siano contemporaneamente vere entrambe le proposizioni. ⁽³⁾

Rimanendo sempre su un piano intuitivo, siamo in grado di riconoscere quando due proposizioni, pur formalmente diverse, esprimono la stessa affermazione. Due proposizioni di questo tipo si dicono tra loro *equivalenti* e l'una può essere sostituita dall'altra dove sia necessario.

Per indicare che due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono *equivalenti* scriveremo $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$.

Ad esempio:

(i)	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	\iff	$\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$	(proprietà commutativa)
(ii)	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	\iff	$\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$	(proprietà commutativa)
(iii)	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$	\iff	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$	(proprietà associativa)
(iv)	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$	\iff	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$	(proprietà associativa)
(v)	$\neg(\neg\mathcal{P})$	\iff	\mathcal{P}	(doppia negazione)
(vi)	$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$	\iff	$\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q}$	(prima legge di De Morgan)
(vii)	$\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$	\iff	$\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$	(seconda legge di De Morgan)
(viii)	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$	\iff	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$	(proprietà distributiva di \wedge rispetto a \vee)
(ix)	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$	\iff	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$	(proprietà distributiva di \vee rispetto a \wedge)

Come indicato, le equivalenze (i), (ii), (iii), (iv) esprimono la commutatività e l'associatività dei connettivi \wedge e \vee .

La (v) stabilisce il principio che una doppia negazione equivale ad una affermazione. ⁽⁴⁾

Per la (vi) negare che due proposizioni siano contemporaneamente vere equivale ad affermare che almeno una delle due è falsa.

Per la (vii) negare che almeno una di due proposizioni è vera equivale ad affermare che sono entrambe false.

La (viii) e la (ix) stabiliscono come interagiscono tra loro i simboli \wedge e \vee .

³Ad esempio, scrivendo "*sogno o son desto*", non affermiamo solo che deve verificarsi almeno una delle due azioni, ma escludiamo anche la possibilità che si verifichino entrambe. La disgiunzione forte usata in questo esempio è quella che in latino si esprime con il termine "*aut*", distinguendola dal "*vel*" riservato invece al caso debole. La *disgiunzione forte* può essere definita a partire dai connettivi introdotti: per indicare che solo una delle proposizioni \mathcal{P}, \mathcal{Q} è vera, possiamo scrivere $(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \neg\mathcal{P})$.

⁴La doppia negazione che come abbiamo nella logica equivale ad un'affermazione nel linguaggio comune può perdere questo connotato. Ad esempio, nella logica dire "*non possiamo non vincere*" equivale quindi a dire "*possiamo vincere*" oppure "*vinceremo*", mentre nel linguaggio comune queste frasi assumono una sfumatura diversa che può originare significati diversi.

ESEMPIO 1. .

Siano $\mathcal{P} : n \text{ è divisibile per } 2$, $\mathcal{Q} : n \text{ è divisibile per } 3$. Negare (\mathcal{P} e \mathcal{Q}) significa negare che n sia divisibile contemporaneamente per 2 e per 3 (cioè per 6). Questa negazione equivale a dire che n non è divisibile per 2 oppure n non è divisibile per 3. Negare ($\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$) significa invece negare che n sia divisibile per almeno uno dei due numeri. Questo si può esprimere scrivendo che n non è divisibile per 2 e non è divisibile per 3 (più semplicemente: non è divisibile né per 2 né per 3.)

Un altro connettivo logico è il *connettivo condizionale* o *implicazione logica*:

"se" "allora"

Consideriamo ad esempio la frase "se penso allora esisto".

In essa possiamo distinguere due parti: una prima proposizione che diremo premessa

$\mathcal{P} : \text{io penso}$

ed una seconda che diremo conseguenza

$\mathcal{Q} : \text{io esisto,}$

legate dal connettivo *se ... allora*, che indicheremo con il simbolo \Rightarrow . La proposizione precedente può essere dunque scritta nella forma

$\text{io penso} \Rightarrow \text{io esisto.}$

In generale, date due proposizioni \mathcal{P} , \mathcal{Q} , potremo scrivere l'*implicazione* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, che leggeremo in una delle seguenti forme:

se \mathcal{P} allora \mathcal{Q}

da \mathcal{P} segue \mathcal{Q}

vale \mathcal{Q} se vale \mathcal{P}

\mathcal{P} è condizione sufficiente per \mathcal{Q}

\mathcal{Q} è condizione necessaria per \mathcal{P} .

Il lettore presti particolare attenzione alle ultime due forme.

" \mathcal{P} è condizione sufficiente per \mathcal{Q} " significa che basta sapere che \mathcal{P} è vera per dedurre che anche \mathcal{Q} lo è. Così ad esempio sapere che io penso è sufficiente a garantire che io vivo.

" \mathcal{Q} è condizione necessaria per \mathcal{P} " significa che se \mathcal{Q} fosse falsa, allora anche \mathcal{P} lo sarebbe, cioè perché possa essere vera \mathcal{P} , deve preliminarmente essere vera \mathcal{Q} (anche se questo non assicura la verità di \mathcal{P}). Così, per poter pensare è necessario essere vivi, anche se ci sono istanti della vita in cui uno non pensa.

Per la definizione dell'implicazione logica $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, assumiamo che sia *falsa* solo quando \mathcal{P} è vera e \mathcal{Q} è falsa (nel senso che *riteniamo falso ogni ragionamento che partendo da un enunciato vero arrivi ad una conseguenza falsa*):

$$\neg(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}).$$

Da questa definizione segue

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) &\iff \neg(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \\ &\iff \neg\mathcal{P} \vee \neg(\neg\mathcal{Q}) \quad (\text{prima legge di De Morgan}) \\ &\iff \neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \quad (\text{doppia negazione}). \end{aligned}$$

Più esplicitamente, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera se

\mathcal{P} e \mathcal{Q} sono entrambe vere

oppure

\mathcal{P} è falsa.

In base a questa definizione risultano vere delle implicazioni che nel linguaggio comune sono prive di senso, sia perché non è richiesta alcuna connessione logica tra \mathcal{P} e \mathcal{Q} sia perché si considera vera, ad esempio, una proposizione che partendo da un presupposto falso, implica una conseguenza vera. Ad esempio, la proposizione

$$\underbrace{\text{"Se 5 è un numero"}}_{\text{vera}} \text{ allora } \underbrace{\text{"Roma è una città"}}_{\text{vera}}$$

è vera, eppure nella logica comune è senza significato. Ugualmente vera è la proposizione

$$\underbrace{\text{"Se Parigi è la capitale d'Italia"}}_{\text{falsa}} \text{ allora } \underbrace{\text{"5 + 5 = 10"}}_{\text{vera}}$$

in cui una premessa falsa implica una conseguenza vera. Dunque, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ non significa necessariamente che \mathcal{Q} sia una conseguenza logica di \mathcal{P} ; per decidere se l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera o falsa non resta che tener conto della definizione.

Osserviamo che l'implicazione logica non soddisfa la proprietà commutativa

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \not\iff (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}).$$

Infatti se \mathcal{P} è *falsa* e \mathcal{Q} è *vera*, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è *vera*, mentre l'implicazione $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è *falsa*.

ESEMPIO 2.

Sia \mathcal{P} la proposizione: "l'ultima cifra di un numero è zero" e \mathcal{Q} la proposizione: "il numero è divisibile per cinque"; è evidente che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera, mentre $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ è falsa. Infatti ogni numero che ha come ultima cifra 0 risulta divisibile per 5, mentre esistono numeri divisibili per 5 che non hanno come ultima cifra 0.

Siamo ora in grado di definire in modo rigoroso il simbolo di *equivalenza* tra proposizioni " \iff " che fin qui abbiamo usato quasi come simbolo stenografico.

Due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono legate dal connettivo "*...se e solo se...*" (che è detto *doppia implicazione* ed è indicato con il simbolo $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$), quando valgono contemporaneamente le implicazioni $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Tenendo conto di quanto detto sopra a proposito della definizione di implicazione, la doppia implicazione equivale a

$$(\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\neg \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}).$$

Applicando successivamente la proprietà distributiva (viii) possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} & [(\neg \mathcal{P}) \wedge (\neg \mathcal{Q} \vee \mathcal{P})] \vee \{\mathcal{Q} \wedge [(\neg \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}]\} \\ & [(\neg \mathcal{P}) \wedge \neg \mathcal{Q}] \vee (\neg \mathcal{P} \wedge \mathcal{P}) \vee [(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\neg \mathcal{Q} \wedge \mathcal{Q})]. \end{aligned}$$

Poiché $(\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{P})$, $(\mathcal{Q} \wedge \neg \mathcal{Q})$ non sono mai vere, in definitiva la doppia implicazione equivale a

$$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\neg \mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}).$$

L'osservazione precedente ci permette dunque di affermare che $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ è vera quando \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono entrambe vere o entrambe false. La scrittura $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ si legge anche "condizione necessaria e sufficiente perché sia vera \mathcal{P} è che sia vera \mathcal{Q} ".

ESEMPIO 3.

Consideriamo le proposizioni

$$\mathcal{P}: n^2 \text{ è pari}, \quad \mathcal{Q}: n \text{ è pari}.$$

Si ha

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}.$$

Infatti:

$\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ perché un numero n pari si può scrivere nella forma $n = 2h$ (con h intero) e quindi $n^2 = 4h^2 = 2 \cdot 2h^2$.

$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ perché dall'identità $n^2 = (n+1)(n-1) + 1$ deduciamo che i due fattori $n-1$ e $n+1$ sono dispari e quindi n è pari.

Il metodo della *deduzione logica* è di fondamentale importanza nella costruzione di ogni teoria matematica. Punto di partenza sono i *concetti primitivi* cioè *enti* che a priori non sono definiti (quali il punto, la retta e il piano della geometria euclidea o il numero dell'aritmetica secondo Peano) e i *postulati*, o assiomi, cioè

proposizioni ammesse come vere che si riferiscono agli *enti primitivi* e che di questi esprimono le proprietà e le relazioni. I *postulati* devono essere scelti in modo che risultino indipendenti (nel senso che nessuno di questi è logicamente deducibile dagli altri) e coerenti (nel senso che non sono contraddittori cioè da essi non si può dedurre contemporaneamente sia una proposizione \mathcal{P} che la sua negazione $\neg\mathcal{P}$).

A partire dai postulati il metodo di deduzione logica permette di costruire tutta una serie di proprietà attraverso i *teoremi*; ciascuno di questi è un asserto che afferma la verità di una proposizione \mathcal{Q} come conseguenza logica di una proposizione \mathcal{P} . Un teorema si può dunque ricondurre all'implicazione

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

dove \mathcal{P} (detta *ipotesi*) è una proposizione che si assume vera e \mathcal{Q} (detta *tesi*) è la proposizione di cui si vuol dedurre la verità.

Il processo di deduzione logica è detto *dimostrazione* e deve seguire regole ben precise (regole di inferenza):⁽⁵⁾

(1) *dimostrazione diretta* (modus ponens).

Se è vera l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ ed è vera \mathcal{P} , allora è vera anche \mathcal{Q} . In simboli:

$$[(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

Lo schema di ragionamento è il seguente:

Premessa	\mathcal{P}	vera
	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	vera
Conseguenza	\mathcal{Q}	vera

ESEMPIO 4.

Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso, sono congruenti.

In questo caso si ha

\mathcal{P} : due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso

\mathcal{Q} : i triangoli sono congruenti.

La proposizione \mathcal{P} è l'**ipotesi**, \mathcal{Q} è la **tesi**.

OSSERVAZIONE 1.

Il fatto di sapere che $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera non consente di concludere niente circa la verità di \mathcal{P} e di \mathcal{Q} senza avere ulteriori informazioni. Infatti abbiamo già visto che in questo caso \mathcal{P} e \mathcal{Q} possono essere entrambe vere, entrambe false⁶ oppure \mathcal{P} falsa e \mathcal{Q} vera.

OSSERVAZIONE 2.

Talora la dimostrazione diretta avviene attraverso uno o più passaggi intermedi: se sono vere le implicazioni $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e se \mathcal{P} è vera, allora è vera anche \mathcal{Q} .

In simboli

$$[(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

⁵Ci sembra opportuno citare a questo proposito due teoremi rivoluzionari nella logica del ventesimo secolo. Furono dimostrati nel 1931 dal matematico austriaco K. Gödel (1906-1978). Per "teorie sufficientemente potenti" (ad esempio: la teoria degli insiemi, la teoria elementare dei numeri) si ha

I) (Teorema dell'incompletezza) Qualsiasi sistema coerente di assiomi è necessariamente incompleto, nel senso che esisteranno sempre enunciati veri che non possono essere dedotti da tali assiomi.

II) È possibile avere una teoria priva di contraddizioni ma non è possibile dimostrare che all'interno di quella teoria non ci sono contraddizioni.

⁶Siano, ad esempio, \mathcal{P} : "2 < 1", \mathcal{Q} : "3 < 2". Poiché \mathcal{P} è falsa, l'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è vera; questo non garantisce che \mathcal{Q} sia vera (e difatti nel nostro caso è falsa). Si osservi anche come \mathcal{Q} possa essere dedotta in modo evidente da \mathcal{P} (basta aggiungere 1 ad ambo i membri della disuguaglianza che definisce \mathcal{P}).

Lo schema del ragionamento è il seguente:

Premessa	\mathcal{P}	vera
	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$	vera
	$\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$	vera
Conseguenza	\mathcal{Q}	vera

(2) *dimostrazione per assurdo* (modus tollens)

Se è vera l'implicazione $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ ed è vera \mathcal{P} , allora è vera anche \mathcal{Q} . In simboli:

$$[(\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}) \wedge \mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

Premessa	\mathcal{P}	vera
	$\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$	vera
Conseguenza	\mathcal{Q}	vera

In pratica, supponendo \mathcal{Q} falsa si arriva alla conclusione che anche \mathcal{P} è falsa, contraddicendo l'ipotesi \mathcal{P} . In altre parole, supponendo \mathcal{Q} falsa, si arriva ad una conclusione assurda. Per rimuovere questa contraddizione dobbiamo necessariamente concludere che \mathcal{Q} è vera.

La dimostrazione per assurdo si basa sull'equivalenza

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P})$$

(in base alle regole viste, entrambe le implicazioni sono vere quando \mathcal{P} è falsa o \mathcal{Q} è vera). Ciò stabilito, se sostituiamo la premessa $\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ con quella equivalente $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lo schema della dimostrazione per assurdo è quello della dimostrazione diretta.

ESEMPIO 5.

Date le proposizioni:

$$\mathcal{P} : "m \cdot n \neq 0", \quad \mathcal{Q} : "m \neq 0 \text{ e } n \neq 0"$$

e dunque

$$\neg\mathcal{P} : "m \cdot n = 0" \quad \neg\mathcal{Q} : "m = 0 \text{ o } n = 0",$$

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ significa "se il prodotto di due numeri è diverso da zero, allora i due numeri sono entrambi diversi da zero"

mentre

$\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ equivale a "data una coppia di numeri di cui almeno uno è zero allora il loro prodotto è zero".

I due enunciati sono diversi dal punto di vista formale, ma equivalenti da quello logico.

Un'altra versione della **dimostrazione per assurdo** è la seguente:

$$(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R} \quad (\text{con } \mathcal{R} \text{ falsa})$$

Infatti

$$(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}$$

equivale successivamente a

$$\neg\mathcal{R} \Rightarrow \neg(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})$$

$$\neg \mathcal{R} \Rightarrow [\neg \mathcal{P} \vee \neg(\neg \mathcal{Q})]$$

$$\neg \mathcal{R} \Rightarrow (\neg \mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$$

$$\neg \mathcal{R} \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q});$$

per la regola di deduzione questo equivale a

$$(\mathcal{R} \vee [\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]);$$

poichè \mathcal{R} è falsa, allora deve essere vera $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

A titolo di esempio, vediamo come si può schematizzare l'enunciato e la dimostrazione (per assurdo) di un teorema di geometria seguendo gli schemi visti sopra.

TEOREMA 1.

Data una retta r ed un punto A fuori di essa esiste una ed una sola retta passante per A e perpendicolare ad r

Possiamo indicare l'ipotesi del teorema con

\mathcal{P} : A è un punto che non appartiene alla retta r ,

mentre la tesi è $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2$ dove

\mathcal{Q}_1 : esiste una retta passante per A e perpendicolare ad r .

\mathcal{Q}_2 : la retta passante per A e perpendicolare ad r è unica.

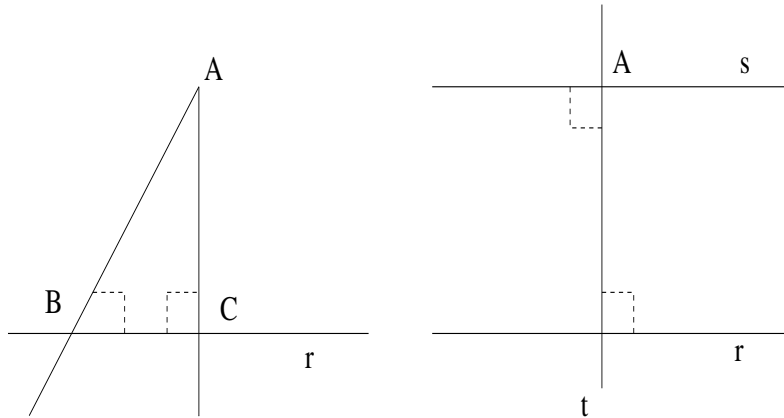
Il teorema si può schematizzare con $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Inoltre (per la prima legge di De Morgan)

$$\neg \mathcal{Q} = \neg \mathcal{Q}_1 \vee \neg \mathcal{Q}_2: \text{ non esiste alcuna retta passante per } A \text{ e perpendicolare a } r \text{ oppure ne esistono almeno due.}$$

Si dimostra facilmente che esiste una retta passante per A e perpendicolare ad r .⁽⁷⁾ Dunque resta la possibilità che esistano due perpendicolari ad r passanti per A . D'altra parte se ci fossero due perpendicolari AC e AB (vedi figura) condotte da A ad r , avremmo un triangolo con due angoli retti, cosa che è dimostrata essere falsa. Lo schema di questa dimostrazione segue quello della seconda versione della dimostrazione per assurdo, ovvero: si deduce da \mathcal{P} e $\text{non } \mathcal{Q}$ una proposizione \mathcal{R} falsa, prendendo

\mathcal{R} : il triangolo A, B, C ha due angoli retti.



Una frase del tipo " x è un numero dispari" non è una proposizione, perchè il suo valore di verità dipende dal valore di x : se x vale 3 si ottiene un enunciato vero, se x vale 8 si ottiene un enunciato falso.

⁷Basta infatti considerare la retta s parallela ad r e passante per A . Questa individua un angolo piatto di vertice A che ammette una retta bisettrice t che lo divide in due angoli retti; t è perpendicolare anche ad r .

Scritture come la precedente, che contengono delle variabili e che diventano proposizioni quando al posto di queste si sostituiscono valori particolari, si dicono *enunciati aperti* o *predicati*. In un predicato individuiamo dei soggetti (*variabili*) e degli enunciati; questi ultimi esprimono le proprietà di un soggetto o le relazioni tra due o più soggetti. Per indicare un predicato useremo una lettera corsiva maiuscola (legata all'enunciato) seguita da una o più lettere minuscole entro parentesi (legate al soggetto). Ad esempio, per indicare che il soggetto x possiede la proprietà \mathcal{P} , scriveremo $\mathcal{P}(x)$ (nell'esempio di partenza $\mathcal{P}(x) : x$ è un numero dispari); per indicare che due soggetti sono legati dalla relazione \mathcal{Q} scriveremo $\mathcal{Q}(x, y)$, (ad esempio $\mathcal{Q}(x, y) : x < y$).

È evidente che, perché un predicato sia ben definito, occorre stabilire l'insieme in cui assumono valore le sue variabili (dominio); l'insieme di verità del predicato (cioè i valori che devono assumere le sue variabili perché l'enunciato sia vero) è un sottoinsieme di tale dominio.

ESEMPIO 6.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &: x < 0 \\ \mathcal{Q}(x, y) &: xy = 1.\end{aligned}$$

Il *dominio* di \mathcal{P} è costituito dai numeri reali; l'*insieme di verità* sono i numeri negativi.

Il *dominio* di \mathcal{Q} è dato dalle coppie di numeri reali; l'*insieme di verità* sono le coppie di numeri i cui elementi sono l'uno il reciproco dell'altro.

Cambiando il dominio cambia anche l'insieme di verità. Ad esempio, se come dominio di \mathcal{P} scegliessimo l'insieme dei numeri naturali l'enunciato sarebbe sempre falso.

Con i predicati si possono utilizzare gli stessi connettivi introdotti per le proposizioni.

Se $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ sono due predicati definiti in uno stesso dominio,

$\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono veri entrambi gli enunciati
$\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono vero almeno uno dei due enunciati
$\neg \mathcal{P}(x)$	è vero per i valori di x che rendono falso l'enunciato $\mathcal{P}(x)$
$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$	è vero per i valori di x che rendono falso $\mathcal{P}(x)$ oppure vero $\mathcal{Q}(x)$
$\mathcal{P}(x) \iff \mathcal{Q}(x)$	è vera per i valori di x che rendono $\mathcal{P}(x)$ e $\mathcal{Q}(x)$ contemporaneamente veri o falsi.

Abbiamo visto che un enunciato aperto diventa una proposizione quando sostituiamo valori particolari alle sue variabili: solo in questo caso possiamo stabilire il valore dell'enunciato che si ottiene. Consideriamo però le seguenti scritte:

tutti i multipli di 4 sono pari

qualche numero è pari

nessun numero è pari

che equivalgono alle seguenti:

tutti i numeri x che sono multipli di 4 sono pari

c'è qualche numero x che è pari

non esiste un numero x che sia pari.

Di ciascuna di esse possiamo dire se è vera o falsa anche senza sapere di quale numero x si sta parlando (in particolare, le prime due sono vere, la terza è falsa); anche se in queste frasi ci sono delle variabili, possiamo ugualmente dire che si tratta di proposizioni. Il motivo che ci permette di fare questa affermazione è che abbiamo *quantificato* le variabili, nel senso che nel primo caso abbiamo detto che la proprietà vale per tutti gli elementi del dominio, nel secondo per qualche elemento, nel terzo per nessun elemento.

Un enunciato aperto può quindi essere trasformato in una proposizione in due modi diversi:

- sostituendo alle variabili valori particolari
- *quantificando* le variabili.

I quantificatori logici sono due:

- *il quantificatore universale* (indicato con il simbolo \forall , che si legge "per ogni") esprime il fatto che una data proprietà \mathcal{P} vale per tutti i valori possibili delle variabili.

ESEMPIO 7. (*il quantificatore universale*)

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ è multiplo di } 4 \Rightarrow n \text{ pari}$,

indica che ogni numero multiplo di 4 è pari.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

indica che l'uguaglianza scritta è valida quando diamo ad x e ad y un qualunque valore numerico.

- *Il quantificatore esistenziale* (indicato con il simbolo \exists ... ;, che si legge "esiste almeno un/una ... tale che") esprime il fatto che una data proprietà vale per almeno un valore delle variabili.

ESEMPIO 8. (*Il quantificatore esistenziale*)

La proposizione " $\exists n \in \mathbb{N}: n \text{ è pari}$ " afferma l'esistenza di almeno un numero pari.

La proposizione " $\exists x \in \mathbb{R}: 2x + 1 = 0$ " afferma che l'equazione $2x + 1 = 0$ ammette almeno una soluzione.

OSSERVAZIONE 3.

Per la seconda proposizione dell'esempio precedente vale un risultato più forte di quello che abbiamo enunciato; in realtà, l'equazione ammette un'unica soluzione, cioè esiste un unico valore da assegnare alla variabile x perché valga l'eguaglianza indicata. Per esprimere questa nuova informazione scriviamo:

$$\exists_1 x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 0.$$

Il simbolo \exists_1 si legge "*esiste solamente un/una*" oppure "*esiste uno/una ed un solo/a*".

ESEMPIO 9.

$$\exists_1 x : x^2 = 0$$

$\exists_1 x : x \text{ è l'autore della Divina Commedia.}$

OSSERVAZIONE 4.

Per esprimere il fatto che una data proprietà non è verificata per nessun valore delle variabili, ad esempio

nessun numero è pari
(che è ovviamente falsa),

oppure

il quadrato di nessun numero è strettamente negativo
(che è vera),

possiamo usare il simbolo $\bar{\exists}$, che si legge "non esiste un/una" :

$$\bar{\exists}n : n \text{ pari}$$

$$\bar{\exists}x : x^2 < 0.$$

Più comunemente, si preferisce usare il quantificatore \forall , affermando che per tutti i valori delle variabili è vera la negazione dell'asserto:

$$\forall n, n \text{ è dispari}$$

$$\forall x, x^2 \geq 0.$$

OSSERVAZIONE 5.

Quando una variabile è legata ad un quantificatore si dice che è *vincolata*, altrimenti si dice che è *libera*. Negli esempi finora incontrati le variabili erano sempre vincolate. Se scriviamo invece:

$$\text{esiste un numero } x \text{ tale che } x + y = 2$$

ovvero in forma simbolica,

$$\exists x : x + y = 2,$$

la variabile x è vincolata (al quantificatore esistenziale), mentre le variabili y è libera. In questo caso si ha un enunciato *aperto*, il cui significato è

$$\text{dato } y, \text{ esiste un valore di } x \text{ per il quale } x + y = 2.$$

Per chiudere un enunciato in più variabili, occorre legare ciascuna di esse ad un quantificatore. Nel caso dell'esempio precedente, potremo scrivere

$$\forall y, \exists x : x + y = 2$$

esprimendo in questo modo il fatto che, qualunque sia il valore assegnato alla variabile y , l'equazione $x + y = 2$ nell'incognita x ha sempre (almeno) una soluzione. In questo caso potremmo scrivere con più precisione

$$\forall y, \exists_1 x : x + y = 2$$

esprimendo l'informazione che non solo la soluzione esiste, ma è anche unica.⁽⁸⁾

I *quantificatori* verificano alcune proprietà legate al fatto che sostanzialmente essi sono congiunzioni o disgiunzioni allargate a tutti gli elementi di un insieme. Possiamo riassumere queste proprietà dicendo che

- due *quantificatori dello stesso tipo* possono essere scambiati di posto senza alterare il senso dell'enunciato, cioè il suo valore di verità;
- due *quantificatori di diverso tipo non* si possono scambiare.

ESEMPIO 10.

Sia $P(x, y)$ il predicato " x, y sono numeri e $y \geq x$ "; le due scritte

$$\forall x, \exists y : y \geq x$$

$$\exists y : \forall x, y \geq x,$$

sono diverse.

⁸L'esempio andrebbe formulato in una forma più corretta precisando in quali insiemi numerici variano x e y . Ad esempio se x e y sono numeri interi l'equazione ha sempre soluzione; se invece x e y sono numeri naturali, l'equazione potrebbe non avere soluzioni, come succede nel caso $y = 3$: non esiste alcun numero naturale x tale che $x + 3 = 2$.

Infatti nel primo caso si esprime il fatto che fissato un qualunque numero, ne esiste sempre almeno uno più grande di questo. Nel secondo caso si afferma l'esistenza di un numero che è più grande di tutti gli altri numeri. Evidentemente la prima affermazione è vera, la seconda è falsa.

ESEMPIO 11.

Sia $P(x, y)$: "x è perpendicolare a y", esteso alle rette del piano. L'enunciato

$$\forall x, \exists y : P(x, y)$$

significa che per ogni retta x ne esiste almeno una y ad essa perpendicolare (enunciato vero), mentre

$$\exists y : \forall x, P(x, y)$$

significa che esiste una retta y perpendicolare a tutte le rette x del piano (enunciato falso).

La negazione di un enunciato che contiene quantificatori si realizza scambiando tra loro il quantificatore universale \forall ed il quantificatore esistenziale \exists e negando il predicato:

$$\neg[\forall x, \mathcal{P}(x)] \iff \exists x : \neg\mathcal{P}(x)$$

$$\neg[\exists x : \mathcal{P}(x)] \iff \forall x, \neg\mathcal{P}(x).$$

ESEMPIO 12.

Nelle seguenti coppie di predicati, uno è la negazione dell'altro:

<i>predicato</i>	<i>negazione del predicato</i>
• $\exists x : x^2 - 1 < 0$	$\forall x, x^2 - 1 \geq 0$
• $\forall x, x^2 = x$	$\exists x : x^2 \neq x$
• $\forall x \exists y : y \geq x$	$\exists x : \forall y, y < x$

Nell'ultimo esempio, il predicato afferma che, fissato un qualunque numero x, ne esiste almeno uno y non minore di quello. La negazione afferma l'esistenza di un numero x maggiore di tutti i numeri y.

2 Le tabelle di verità

Per verificare le proposizioni risultano utili le cosiddette **tabelle di verità**. Sono tabelle che hanno su ogni colonna una diversa proposizione che compone quella assegnata da verificare, mentre sulle righe compaiono tutte le combinazioni vero/falso che si possono avere.

ESEMPIO

La tabella di verità delle proposizioni $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ e $\neg \mathcal{P}$ sono rispettivamente:

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

\mathcal{P}	$\neg \mathcal{P}$
V	F
V	F
F	V
F	V

Osservazione

Ricordiamo che due proposizioni che hanno lo stesso valore di verità si dicono *equivalenti*, nella tabelle di verità le due colonne ad esse corrispondenti sono uguali.

Vediamo alcuni esempi relativi alle proposizioni che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente.

ESEMPIO 1: Prima legge di De Morgan: $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \iff \neg \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{Q}$

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\neg \mathcal{P}$	$\neg \mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{Q}$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

ESEMPIO 2: Seconda legge di De Morgan: $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \iff \neg \mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}$

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	$\neg \mathcal{P}$	$\neg \mathcal{Q}$	$\neg \mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

ESEMPIO 3: Proprietà distributiva di \wedge rispetto a \vee :

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	\mathcal{R}	$\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	F

\mathcal{P}	\mathcal{Q}	\mathcal{R}	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F

3 Insiemi

Il concetto di **insieme** è assunto come *primitivo*: chiameremo *insieme* una collezione di oggetti (gli *elementi* dell'insieme) di natura qualsiasi. Normalmente indicheremo con una lettera maiuscola un insieme e con una lettera minuscola un suo elemento. Un insieme A rimane quindi definito quando, dato un qualunque oggetto x , è possibile stabilire se x appartiene o no ad A . Scriveremo

$$x \in A$$

per indicare che l'elemento x appartiene all'insieme A , mentre con la scrittura

$$x \notin A$$

indicheremo che l'elemento x non appartiene ad A .

Un insieme particolare è l'*insieme vuoto* (\emptyset) che è l'insieme privo di elementi.

ESEMPIO 13.

- La frase " A è l'insieme dei numeri minori di 8" non individua un insieme perché non è specificato di quale tipo sono i numeri appartenenti ad A : reali, razionali, interi,.....
- La definizione " B è l'insieme dei numeri reali maggiori di 2 e minori di 8" è corretta, perché la legge assegnata permette di stabilire quali sono gli elementi di B .
- L'enunciato " C è l'insieme dei numeri reali x tali che $x^2 + 1 = 0$ " individua l'insieme vuoto. È evidente che questo insieme può essere individuato in infiniti altri modi; un altro possibile esempio è " D è l'insieme dei somari che volano".

Esistono due modi per definire un insieme:

- elencando i suoi elementi
- indicando una o più proprietà che "caratterizzano" i suoi elementi, nel senso che tutti gli elementi dell'insieme e solo questi le verificano.

Esempi fondamentali di insiemi numerici sono:

numeri naturali	\mathbb{N}	=	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
numeri interi	\mathbb{Z}	=	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
numeri razionali	\mathbb{Q}	=	$\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m \text{ ed } n \text{ primi tra loro}\}$.

I primi due insiemi sono definiti elencandone gli elementi, anche se in realtà l'elenco è limitato ad un numero esiguo di termini; i punti di sospensione stanno ad indicare che l'effettivo elenco dovrebbe contenere un numero infinito di termini. In una scrittura di questo genere si presuppone che il lettore sia in grado di estrapolare la legge di appartenenza dell'insieme, ma dovrebbe essere chiaro come questo non sia accettabile da un punto di vista formale. Non insistiamo oltre su questo tipo di obiezione.

Per quanto riguarda la definizione di \mathbb{Q} , questa è stata data scrivendo esplicitamente la legge che ne caratterizza gli elementi. Anche per definire l'insieme

$$\mathbb{R} \text{ (numeri reali)}$$

si segue questo modello, ma illustrare le proprietà (o più precisamente gli assiomi) con cui i numeri reali possono essere caratterizzati esula dagli obiettivi di questo libro. A questo scopo rimandiamo ad un qualunque testo di Analisi Matematica. Qui ci limitiamo a ricordare che l'insieme è costituito dai numeri razionali (che hanno una rappresentazione decimale finita o periodica) e da quelli irrazionali (che hanno una rappresentazione decimale infinita, non periodica).

I numeri reali sono messi in corrispondenza biunivoca con i punti della retta quando su di essa si introduce un riferimento cartesiano. Per prima cosa orientiamo la retta, fissando un verso che chiamiamo positivo, mentre il suo opposto sarà chiamato negativo. Sulla retta orientata scegliamo un punto O , che chiameremo punto origine (o più semplicemente *origine*.) Questo divide la retta in due semirette: semiretta positiva quella che contiene i punti successivi ad O , negativa l'altra. Fissato un punto U sulla semiretta positiva, possiamo misurare ogni altro segmento OP mediante l'unità di misura OU . In questo modo ad ogni

punto P della retta associamo uno ed un solo numero reale x che coincide con la misura p di OP (rispetto all'unità OU) se P appartiene alla semiretta positiva, oppure con il valore $-p$ se P appartiene alla semiretta negativa. Se $O \equiv P$ allora $x = 0$. Viceversa ad ogni numero reale x viene associato un punto P che è l'unico punto tale che il segmento OP misura x rispetto ad OU e si trova dalla parte positiva se $x \geq 0$ oppure misura $-x$ e si trova dalla parte negativa se $x < 0$. L'introduzione di un riferimento cartesiano permette dunque di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali: ad ogni punto P della retta rimane associato un ed un solo numero reale x detta ascissa di P . Identificando ogni punto con la propria ascissa (in pratica, scrivendo $P = x$), la retta viene identificata con l'insieme dei numeri reali: in questo modo ad un ente geometrico si sovrappone una struttura numerica; parleremo a questo proposito di retta reale. In particolare possiamo descrivere certi sottoinsiemi della retta mediante equazioni o disequazioni e viceversa indicare certi sottoinsiemi di numeri reali con il nome dell'insieme geometrico a cui corrispondono, come ad esempio, *intervalli* e *semirette*. Più precisamente:

Intervalli	$[a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
	$[a, b)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
	$(a, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
	(a, b)	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
Semirette	$[a, +\infty)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
	$(a, +\infty)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
	$(-\infty, b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
	$(-\infty, b)$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

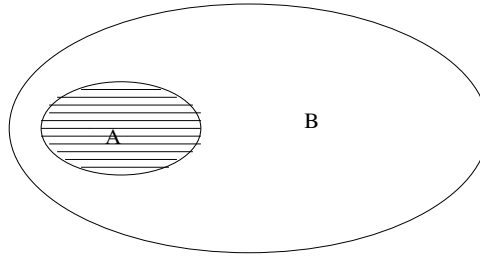
DEFINIZIONE 1.

Si dice che l'insieme A è contenuto nell'insieme B (oppure che A è sottoinsieme di B) e si scrive

$$A \subset B$$

se ogni elemento di A è anche elemento di B . In simboli

$$A \subset B \iff [\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B].$$



Osserviamo che per affermare che un insieme A non è sottoinsieme di B si deve negare la proposizione sopra, quindi, tenuto conto di quanto osservato nei paragrafi precedenti, scriviamo:

$$A \not\subset B \iff [\exists x, x \in A \wedge x \notin B]$$

DEFINIZIONE 2.

Si dice che l'insieme A è sottoinsieme proprio dell'insieme B e si scrive

$$A \subsetneq B$$

se $A \subset B$ ma $B \not\subset A$, cioè se esiste qualche elemento di B , che non appartiene ad A . In simboli

$$A \subsetneq B \iff [(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)] \wedge [\exists x : x \notin A \wedge x \in B]$$

DEFINIZIONE 3.

Due insiemi A, B si dicono uguali, e si scrive

$$A = B,$$

se ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo e viceversa, ovvero se ciascuno è sottoinsieme dell'altro: $A \subset B$ e $B \subset A$. In simboli

$$A = B \iff [(\forall x, x \in A \implies x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \implies x \in A)]$$

oppure

$$A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$$

o anche

$$A = B \iff (\forall x, x \in A \iff x \in B).$$

L'insieme vuoto è considerato sottoinsieme di qualunque insieme, cioè si può scrivere

$$\forall A, \emptyset \subset A.$$

Poiché

$$A \subset A,$$

possiamo affermare che ogni insieme non vuoto ha almeno due sottoinsiemi: se stesso e l'insieme vuoto.

Nel caso in cui

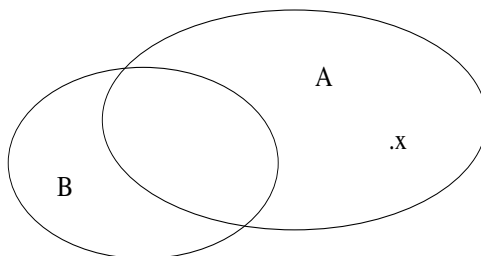
$$A = \{x : \mathcal{P}(x)\}, \quad B = \{x : \mathcal{Q}(x)\},$$

allora

$$A \subset B \iff \forall x, \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x),$$

$$A \not\subset B \iff \exists x : \mathcal{P}(x) \wedge \neg \mathcal{Q}(x)$$

$$A \subsetneq B \iff \forall x, (\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x)) \wedge (\exists x : \mathcal{Q}(x) \cap \neg \mathcal{P}(x)).$$

**ESEMPIO 14.**

Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = (-\infty, 0)$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} = (-\infty, 1)$. In questo caso $A \subset B$ e $B \not\subset A$.

Infatti ogni elemento dell'insieme A appartiene a B : $\forall x, x < 0 \implies x < 1$.

$B \not\subset A$ perché esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B cioè $\exists x : x < 1 \wedge x \geq 0$ (ad esempio $x = \frac{1}{2}$, ma di numeri con questa proprietà ne esistono infiniti, precisamente tutti i numeri dell'intervallo $[0, 1)$).

ESEMPIO 15.

Verificare quale delle inclusioni \subset o \supset vale tra gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : 4x - 2 \leq x + 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x < 3 + x\}$.

Per stabilire se uno dei due insiemi è contenuto nell'altro, esplicitiamo le condizioni di appartenenza, risolvendo le due disequazioni:

$$4x - 2 \leq x + 10 \iff 3x \leq 12 \iff x \leq 4$$

$$2x < 3 + x \iff x < 3.$$

Dunque

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\} = (-\infty, 4]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\} = (-\infty, 3).$$

Poiché

$$x < 3 \Rightarrow x \leq 4 \quad \text{ma} \quad x \leq 4 \not\Rightarrow x < 3,$$

si ha

$$B \subsetneq A.$$

ESEMPIO 16.

Siano

$$A = \{x : 1 < x < 3\}, \quad B = \{x : 2 < x < 4\}.$$

È evidente che $A \not\subset B$ perché possiamo trovare un elemento x in A (ne basta uno) che non appartiene a B , ad esempio $x = 1,5$; analogamente $B \not\subset A$, perché possiamo trovare un elemento di B che non appartiene ad A , ad esempio $x = 3,5$.

ESEMPIO 17.

Siano

$$A = \{x : x^4 - x^2 = 0\} \quad \text{e} \quad B = \{-1, 0, 1\}.$$

In questo caso $A = B$.

Infatti risulta $A \subset B$ perché $x \in A$ significa x risolve l'equazione $x^4 - x^2 = 0$ e questa ha per soluzioni proprio $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, che sono anche elementi di B . D'altra parte i valori $0, 1, -1$ (elementi di B) sono soluzioni di $x^4 - x^2 = 0$, quindi appartengono ad A .

Per gli insiemi numerici che abbiamo introdotto valgono le seguenti inclusioni:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Osserviamo che il simbolo \subset è *transitivo*, ovvero

$$A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C,$$

mentre il simbolo \in non lo è. Esempio

$$x \in \{x\} \text{ e } \{x\} \in \{\{x\}\} \text{ ma } x \notin \{\{x\}\}.$$

OSSERVAZIONE 6.

Si presti attenzione al diverso significato che hanno i simboli \in, \subset . Quando si scrive $x \in A$, si intende che A è un insieme e x un suo elemento; la scrittura $B \subset A$ significa che A e B sono due insiemi e che ogni elemento del primo appartiene al secondo. In particolare

$x \in \{x\}$ è una scrittura corretta, perché $\{x\}$ è un insieme che ha come unico elemento x .

$x \subset \{x\}$ non ha senso perché i termini collegati dal simbolo sono "gerarchicamente" diversi (un oggetto ed un insieme).

Per capire l'esempio sulla transitività del simbolo \in , si noti che $\{\{x\}\}$ è l'insieme che ha come unico elemento l'insieme $\{x\}$ e non l'elemento x stesso.

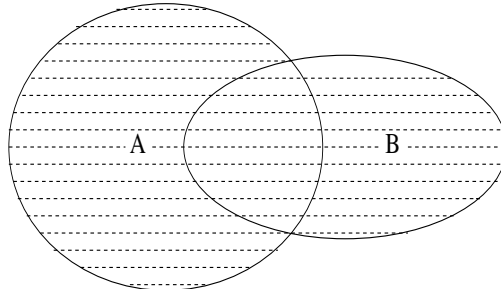
DEFINIZIONE 4.

L'unione di due insiemi A, B , indicata con $A \cup B$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

In particolare

$$A \cup \emptyset = A.$$

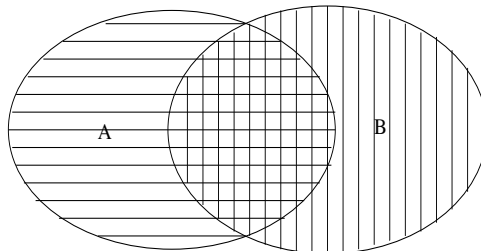


Nella figura sopra, l'insieme $A \cup B$ è rappresentato a tratteggio.

DEFINIZIONE 5.

L'intersezione di due insiemi A, B , indicata con $A \cap B$, è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Nella figura sopra $A \cap B$ è rappresentato col tratteggio a quadri.

Se A e B non hanno elementi in comune, scriveremo

$$A \cap B = \emptyset,$$

mentre in ogni caso risulta

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

ESEMPIO 18.

Se

$$A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\} \text{ e } B = \{x, y, z, w, 1, 2, 3\},$$

allora

$$A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z, w, 1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{1, 2, 3\}.$$

Osserviamo che l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

può essere scritto nella forma

$$A \cap B,$$

dove A e B sono gli insiemi in cui sono rispettivamente verificate la prima e la seconda disequaglianza del sistema, cioè

$$A = \{x : x > 1\}, \quad B = \{x : x < 3\}.$$

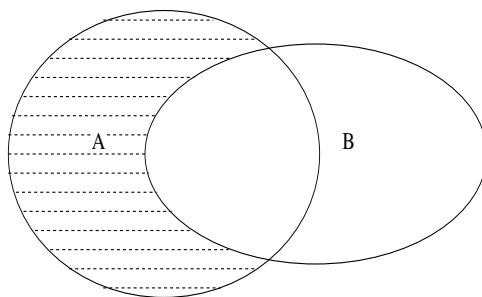
Infatti risolvere il sistema significa cercare i valori di x che verificano contemporaneamente le due disequazioni. È immediato concludere che

$$A \cap B = \{x : 1 < x < 3\}.$$

DEFINIZIONE 6.

La differenza di due insiemi A, B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B :

$$A - B \text{ (oppure } A \setminus B) = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$



L'insieme $A - B$ è rappresentato a tratteggio nella figura sopra.

Alla *differenza* $A - B$ si dà anche il nome di *complementare* di B in A . Il termine "*complementare*" si usa più comunemente quando ci occupiamo di insiemi B che sono tutti sottoinsiemi di uno stesso insieme fisso A , che chiameremo insieme *universo* o *spazio ambiente*.

La notazione più comunemente usata per descrivere il complementare di B (in A) è $\mathcal{C}_A B$, che sostituisce con lo stesso significato la notazione $A - B$. Quando poi l'insieme universo è fissato una volta per tutte senza possibilità di equivoci, possiamo scrivere semplicemente $\mathcal{C}B$ invece di $\mathcal{C}_A B$.

Nel caso in cui

$$A = \{x : \mathcal{P}(x)\}, \quad B = \{x : \mathcal{Q}(x)\},$$

le operazioni sugli insiemi si traducono in operazioni sui predicati:

$$A \cup B = \{x : \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)\},$$

$$A \cap B = \{x : \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)\},$$

$$A - B = \{x : \mathcal{P}(x) \wedge \neg \mathcal{Q}(x)\},$$

$$\mathcal{C}B = \{x : \neg \mathcal{Q}(x)\}.$$

Proprietà delle operazioni tra insiemi.

PROPRIETÀ	OPERAZIONI TRA INSIEMI	OPERAZIONI TRA PREDICATI
(1) Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \iff \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \iff \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$
(2) Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
(3) Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
Distributiva	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
(4) Doppia negazione	$\mathcal{C}\mathcal{C}B = B$	$\neg(\neg\mathcal{P}) \iff \mathcal{P}$
(5) 1 ^a Legge di De Morgan	$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$	$\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \iff \neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$
(6) 2 ^a Legge di de Morgan	$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$	$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \iff \neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q}$

La proprietà associativa permette di estendere le operazioni unione ed intersezione ad un numero qualunque di insiemi.

ESEMPIO 19.

Se $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} = \{x : x \leq -1\} \cup \{x : x \geq 1\}$, allora $\mathcal{C}A = \{x : x > -1\} \cap \{x : x < 1\} = (-1, 1)$.

ESEMPIO 20.

Se $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\} = \{x : x > -1\} \cap \{x : x < 2\}$, allora $\mathcal{C}A = \{x : x \leq -1\} \cup \{x : x \geq 2\}$.

DEFINIZIONE 7.

Il prodotto cartesiano degli insiemi A e B , indicato con $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie il cui primo elemento appartiene ad A ed il secondo a B :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

ESEMPIO 21.

Un esempio significativo di prodotto cartesiano è quello dell'insieme \mathbb{R} per se stesso, cioè l'insieme delle coppie di numeri reali (che individuano i punti del piano cartesiano):

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Comunemente questo insieme si indica \mathbb{R}^2 .

Il fatto che nella definizione si considerino coppie ordinate implica che il prodotto cartesiano non è commutativo, cioè:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Basta infatti pensare che nel piano cartesiano le coppie (a, b) e (b, a) rappresentano punti diversi se $a \neq b$.

Nella scrittura $x \in A$ abbiamo sempre convenuto che A rappresenti un insieme e x un elemento, stabilendo una specie di gerarchia tra questi due concetti. Esistono però insiemi che contengono se stessi come elemento. Un esempio è "l'insieme X dei concetti astratti": poichè X è esso stesso un concetto astratto, risulta $X \in X$.

Si chiamano regolari gli insiemi che *non* contengono se stessi tra i propri elementi e non regolari gli altri. È ragionevole supporre che ogni insieme X appartenga all'una o all'altra categoria, cioè che sia $X \notin X$ oppure $X \in X$.

Consideriamo adesso $\mathcal{R} = \{ \text{l'insieme di tutti gli insiemi } X \text{ regolari} \}$.

Non è possibile stabilire se \mathcal{R} è o non è regolare. Infatti, se \mathcal{R} fosse regolare, tra gli insiemi che ne costituiscono gli elementi ci sarebbe anche \mathcal{R} , ma allora $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ cioè \mathcal{R} non è regolare.

Se invece \mathcal{R} fosse irregolare, tra gli insiemi suoi elementi non ci sarebbe \mathcal{R} , cioè $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$; ma allora \mathcal{R} sarebbe regolare.

Formalizzando quanto sopra, si può scrivere:

$$\mathcal{R} = \{ X : X \notin X \}$$

$$\mathcal{R} \notin \mathcal{R} \iff \mathcal{R} \in \mathcal{R},$$

che costituisce un *paradosso* o *antinomia*, cioè una contraddizione all'interno della teoria degli insiemi. Non è qui possibile presentare i problemi che nascono da questo esempio. Ad un'altra antinomia abbiamo già accennato: la frase "io sono sempre un bugiardo" è una frase sintatticamente corretta, ma evidentemente contraddittoria.

Ricordiamo che alla classica teoria degli insiemi sin qui esposta, nella quale possono presentarsi più antinomie, è stato da tempo attribuito il titolo di *teoria ingenua* o *naïf* e che ad essa è stata sostituita una teoria più complessa, di tipo *assiomatico*, molto più attenta all'uso del termine "insieme". La *teoria elementare* è comunque del tutto adeguata per le applicazioni non specialistiche.

4 Il Principio di induzione

Il *principio di induzione* permette di provare la verità di un predicato definito sui *numeri naturali*.

TEOREMA 2 (Principio di Induzione).

Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato definito sui numeri naturali \mathbb{N} , tale che :

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera
2. $\forall n \in \mathbb{N} : \text{supponendo } \mathcal{P}(n) \text{ vera segue che anche } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera.}$

Allora $\mathcal{P}(n)$ risulta vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In formula:

$$\{\mathcal{P}(0) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)]\} \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)].$$

Una formulazione più generale del *principio di induzione* (ma dal punto di vista logico ad essa equivalente) riguarda quei predicati definiti sui naturali maggiori di un assegnato numero k .

TEOREMA 3 (Principio di Induzione).

Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato definito $\forall n \geq k, (k \in \mathbb{N})$ tale che :

1. $\mathcal{P}(k)$ è vera
2. $\forall n \geq k : \text{supponendo } \mathcal{P}(n) \text{ vera segue che anche } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera.}$

Allora $\mathcal{P}(n)$ risulta vera per ogni $n \geq k$.

ESEMPIO 22.

Provare la seguente eguaglianza:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Posto $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, applichiamo il *Principio di Induzione*:

1. $\mathcal{P}(1)$ è vera perché $\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : \text{supponendo } \mathcal{P}(n) \text{ vera segue che anche } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera.}$

Infatti essendo $\mathcal{P}(n+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, risulta

$$\overbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}^{\text{per l'ipotesi } \mathcal{P}(n)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Quindi, per il principio di induzione l'eguaglianza è verificata.

Il matematico tedesco Gauss ⁽⁹⁾, a soli dieci anni, dedusse la veridicità della precedente eguaglianza utilizzando il seguente algoritmo:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & +2 & +3 & \dots & +n & + \\ n & +n-1 & +n-2 & \dots & +1 & = \\ \hline n+1 & +n+1 & +n+1 & \dots & +n+1 & = n(n+1) \end{array}$$

ESEMPIO 23.

Dimostrare che $n \cdot (n^2 + 5)$ è divisibile per 6, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In questo caso il predicato è $\mathcal{P}(n) : n \cdot (n^2 + 5)$ è divisibile per 6.⁽¹⁰⁾

Verifichiamo il primo passo: $\mathcal{P}(1) : 1 \cdot (1^2 + 5)$ è divisibile per 6, cioè 6 è divisibile per 6, il che è ovviamente vero.

Verifichiamo l'induttività della proposizione (ovviamente $\mathcal{P}(n+1) : (n+1) \cdot [(n+1)^2 + 5]$ è divisibile per 6) esplicitando l'espressione che compare nella definizione di $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned} (n+1)[(n+1)^2 + 5] &= (n+1)[n^2 + 2n + 1 + 5] = \overbrace{(n+1)(n^2 + 5)} + 3n^2 + 3n + 6 = \text{ per l'ipotesi induttiva} \\ &= k \cdot 6 + 3n^2 + 3n + 6 = 6(k+1) + 3n(n+1) = 6(k+1+k'). \end{aligned}$$

Infatti, nel prodotto $3n(n+1)$ compaiono due interi consecutivi n e $n+1$; poiché almeno uno dei due è pari, il loro prodotto contiene come fattore 2; possiamo allora scrivere $n(n+1) = 2k'$ e dunque $3n(n+1) = 6k'$.

ESEMPIO 24.

Il principio di induzione si applica a qualunque predicato che sia definito sui numeri naturali e quindi anche ad un gioco come il seguente, che prende il nome di Torre di Hanoy.

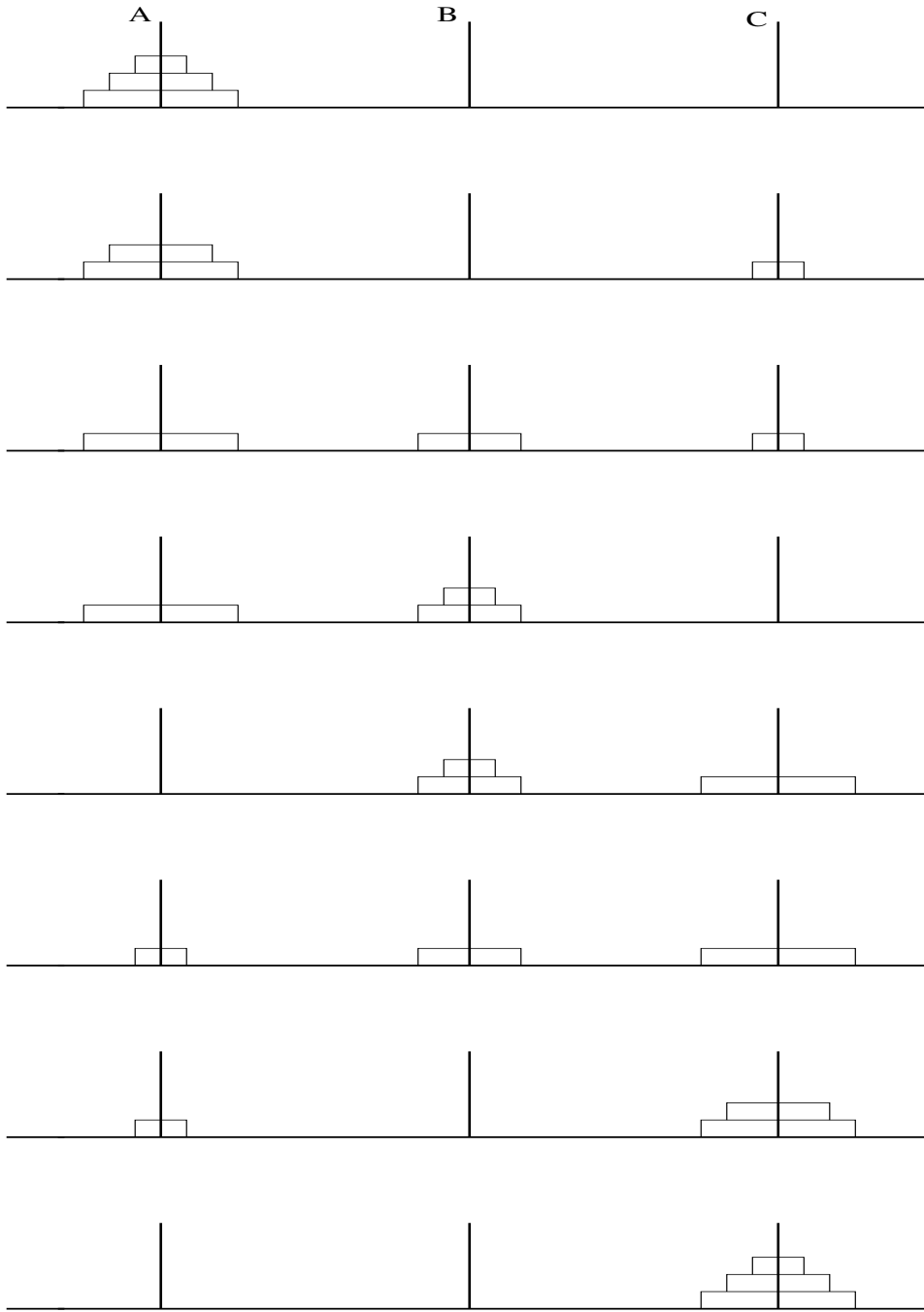
Sono dati n dischi infilati nell'asse A in modo da formare una torre: ogni disco sia sovrapposto ad un altro con diametro maggiore in modo da formare una specie di cono. Il gioco consiste nel trasportare n dischi dall'asse A all'asse C con il minimo numero di mosse, seguendo le seguenti regole:

1. si può trasportare solo un disco alla volta;
2. non si può sovrapporre ad un disco un altro che abbia diametro maggiore.

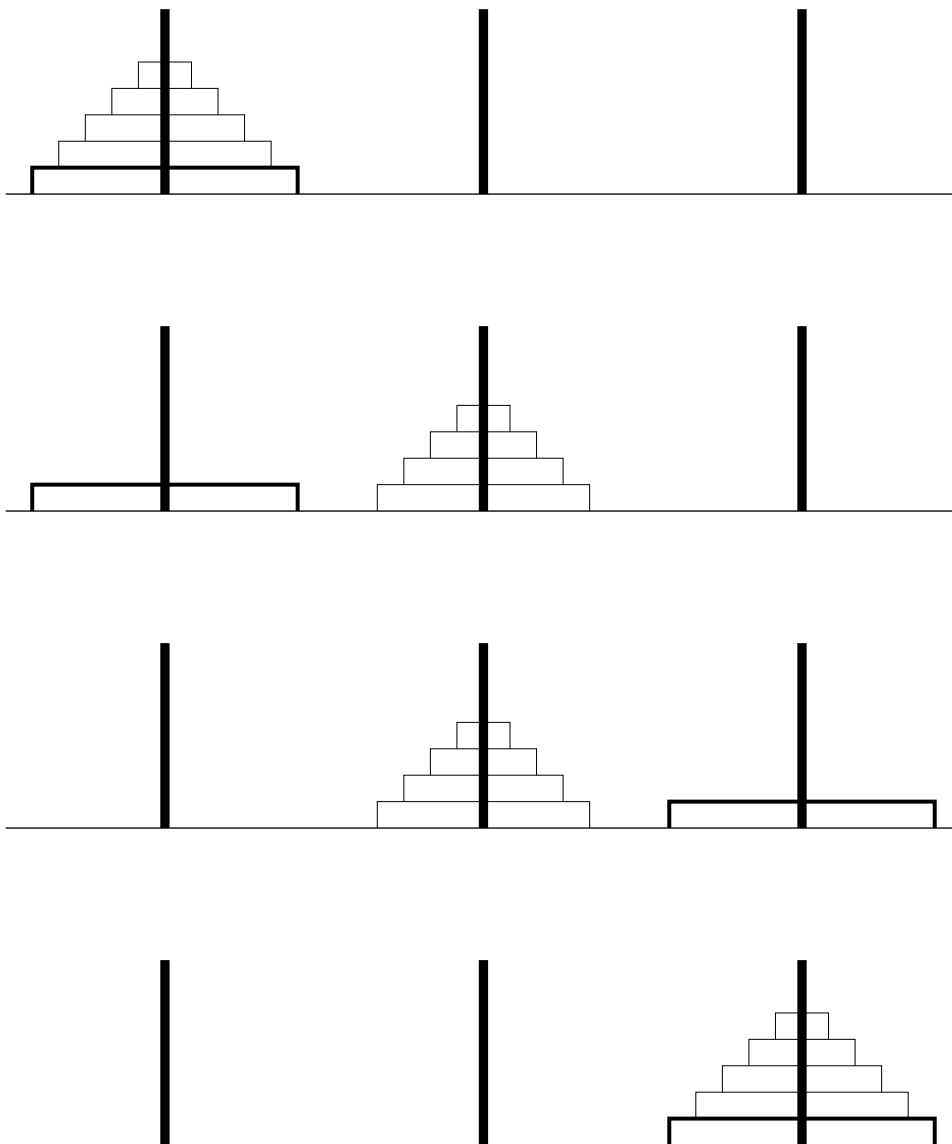
⁹Carl Friedrich Gauss (1777-1855), pietra miliare della storia della matematica, *enfant prodige*, fu uno degli ultimi studiosi a riuscire a dare importanti contributi in tutti i settori della matematica.

¹⁰Un numero intero m è *divisibile* per $h \in \mathbb{N}$ se esiste un altro numero intero k tale che $m = kh$.

Il problema è calcolare il numero R_n di queste mosse.
 Nella figura sottostante facciamo l'esempio del caso di tre dischi.



Il primo passo per la risoluzione del problema è quello di "intuire" R_n . A tale scopo si può procedere nel modo seguente. Se abbiamo $n + 1$ dischi in A , con R_n mosse ne portiamo n in B , quindi portiamo l' n -esimo in C ed infine con altre R_n mosse portiamo gli n dischi in C (vedi figura).



In totale $R_{n+1} = 2R_n + 1$. A questo punto si tratta di determinare R_n in funzione di n . Sostituendo nella relazione trovata $n = 1, n = 2, n = 3$, ecc. possiamo compilare la seguente tabella:

$n :$	1	2	3	4	5	...
$R_n :$	1	3	7	15	31	...

Osservando la tabella si "*intuisce*" che i numeri della seconda riga sono gli interi che precedono le potenze di 2. Ovvero

$$R_n = 2^n - 1.$$

Ovviamente l'esattezza di questa *intuizione* va verificata. Per fare questo, utilizziamo il principio di induzione per il predicato $\mathcal{P}(n) : R_n = 2^n - 1$. Per $n = 1$ è evidentemente vera. Per provare l'induttività di $\mathcal{P}(n)$, ragioniamo come abbiamo fatto sopra per determinare la relazione tra R_{n+1} e R_n . Dovendo spostare $n + 1$ dischi ne spostiamo n da A a B con $2^n - 1$ mosse (qui si utilizza l'ipotesi induttiva), poi spostiamo da A a C l' $(n+1)$ -esimo, infine con altre $2^n - 1$ mosse (è ancora utilizzata l'ipotesi induttiva) portiamo gli n dischi da B a C . In totale:

$$R_{n+1} = (2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

ESEMPIO 25. (Diseguaglianza di Bernoulli)

Dimostrare per induzione che:

$$1 + nh < (1 + h)^n, \quad \forall n \geq 2 \quad (\text{dove } h > -1, h \neq 0).$$

In questo predicato il primo passo da dimostrare è quello per $n = 2$:

$$\mathcal{P}(2): 1 + 2h < (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2,$$

che è ovviamente vero. Per provare l'induttività: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$, osserviamo che

$$\mathcal{P}(n + 1): 1 + (n + 1)h < (1 + h)^{n+1}.$$

Possiamo partire dal secondo membro, cercando di evidenziare nell'espressione il termine al quale applicare la proposizione induttiva:

$$\begin{aligned} (1 + h)^{n+1} &= (1 + h) \overbrace{(1 + h)^n} > \quad (\text{per l'ipotesi induttiva}) \\ &> (1 + h) \overbrace{(1 + nh)} = 1 + h + nh + nh^2 > 1 + (n + 1)h \quad (\text{perché } nh^2 > 0). \end{aligned}$$

IL SIMBOLO DI SOMMATORIA

Per semplificare le espressioni in cui intervengono delle somme, possiamo utilizzare il *simbolo di sommatoria* e scrivere:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=0}^n a_i.$$

L'indice i si chiama indice di sommatoria e la sua scelta è del tutto arbitraria. Ad esempio avremmo potuto scrivere $\sum_{k=0}^n a_k$. Generalmente, per indicare questa possibilità, si dice che l'indice di sommatoria è "una variabile muta".

ESEMPIO 26.

$$\sum_{i=0}^3 i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n.$$

Il principio di induzione permette di dare una definizione rigorosa del *simbolo di sommatoria*, assegnandone il valore al "primo passo" e la legge che, noto il valore al passo n -esimo, permette di dedurre quello al passo $n + 1$ -esimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^0 a_i = a_0 \\ \sum_{i=0}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=0}^n a_i \end{array} \right.$$

Applicando il *principio di induzione* alla proposizione

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{i=0}^n a_i \text{ è definito,}$$

si deduce che $\mathcal{P}(n)$ è sempre vero, cioè che il simbolo di sommatoria risulta pienamente definito. Un procedimento di questa forma si dice costituire una **definizione per ricorrenza**.

Non è difficile provare le seguenti proprietà del *simbolo di sommatoria*.

$$1. \sum_{i=0}^n c = \overbrace{c + c + \dots + c}^{(n+1) \text{ volte}} = (n+1)c$$

$$2. \sum_{i=0}^n c a_i = c \sum_{i=0}^n a_i$$

$$3. \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i$$

$$4. \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{j=0}^n a_j \text{ }^{(11)}$$

$$5. \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad m < n$$

$$6. \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$$

$$7. \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j = \sum_{i,j=0}^n a_i b_j.$$

ESEMPIO 27.

Dimostrare la seguente eguaglianza (somma dei primi n termini di una progressione geometrica)⁽¹²⁾

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ }^{(13)}$$

Procediamo applicando il principio di induzione.

Per $n = 0$ l'eguaglianza è vera, riducendosi alla seguente

$$a^0 = \frac{1 - a}{1 - a}, \quad \text{cioè } 1 = 1.$$

Dimostriamo l'induttività della proposizione, osservando che

$$\mathcal{P}(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}.$$

¹¹L'abbiamo già precisato: *l'indice di sommatoria* è una *variabile muta*.

¹²Si definisce *progressione geometrica* una successione di numeri tali che sia costante il rapporto tra un termine e quello che lo precede (*ragione* della progressione). Ad esempio la *progressione geometrica* di ragione 2 è costituita dai numeri 1, 2, 4, 8, 16, ..., ovvero dai numeri della forma 2^{n-1} , $n = 1, 2, \dots$, o anche 2^n , $n = 0, 1, 2, \dots$.

Scomponiamo la sommatoria applicando la proprietà 5, in modo da poter applicare l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} \overbrace{\sum_{i=0}^n a^i} + a^{n+1} &= \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a} \end{aligned}$$

I FATTORIALI

DEFINIZIONE 8 (Fattoriale).

Definiamo il fattoriale di un numero naturale n come il prodotto dei primi n naturali:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

ESEMPIO 28.

$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ 2! &= 1 \cdot 2 = 2, \\ 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \\ (n+1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1), \\ (2n)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) \cdots (2n-1) \cdot 2n \end{aligned}$$

Anche il fattoriale può essere definito per *ricorrenza*, nel modo seguente:

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ (n+1)! = n! (n+1). \end{cases}$$

In Analisi Matematica è opportuno definire anche il fattoriale del numero 0 ponendo:

$$0! = 1.$$

Il valore del fattoriale cresce molto rapidamente al crescere di n , come si vede dalla seguente tabella

n	$n!$	n	$n!$
1	1	11	399 16800
2	2	12	47990 01600
3	6	13	62270 20800
4	24	14	8 71782 91200
5	120	15	130 76743 68000
6	720	16	2092 27898 88000
7	5040	17	35568 74280 96000
8	40320	18	6 40237 37057 28000
9	3 62880	19	121 64510 04088 32000
10	36 28800	20	2432 90200 81766 40000

Nella tabella successiva sono riportati i valori approssimati dei fattoriali dei multipli di 10 compresi tra 30 e 100.

n	$n!$
30	26.525×10^{32}
40	81.582×10^{47}
50	30.414×10^{64}
60	83.210×10^{81}
70	11.979×10^{100}
80	71.569×10^{118}
90	14.857×10^{138}
100	93.326×10^{157}

ESEMPIO 29.

Dimostrare per induzione che

$$2^n \leq (n+1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

Per $n = 0$ è evidente in quanto la disequaglianza si riduce a $1 = 1$.

Posto $\mathcal{P}(n) : 2^n \leq (n+1)!$, dimostriamo che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo

$$2^{n+1} = 2(2^n) \leq 2[(n+1)!].$$

Per ottenere la tesi, basta provare che

$$2[(n+1)!] \leq (n+2)!.$$

Sviluppando il fattoriale al secondo membro e semplificando, si ottiene

$$2[(n+1)!] \leq (n+1)!(n+2) \iff 2 \leq n+2,$$

che è sempre verificata.

ESEMPIO 30.

Dimostrare per induzione che

$$n! \leq n^n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Per $n = 1$ è banalmente verificata ($1 \leq 1$). Dimostriamo l'induttività della proposizione. Per l'ipotesi induttiva si ha:

$$(n+1)! = n!(n+1) \leq n^n(n+1).$$

Rimane da provare che è

$$n^n(n+1) \leq (n+1)^{(n+1)} = (n+1)^n(n+1).$$

Questo segue dal fatto che

$$n^n \leq (n+1)^n.$$

ESEMPIO 31.

Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Per $n = 1$ è banalmente verificata: $(-1)^2 \cdot 1 = (-1)^2 \cdot 1$.

Osserviamo che

$$\mathcal{P}(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

e scomponiamo la somma al primo membro con la proprietà (5) del simbolo di sommatoria per provare l'induttività della proposizione

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \overbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = \text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &= \overbrace{(-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = (-1)^{n+2} \left[(n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right] = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

I COEFFICIENTI BINOMIALI

Siano n e k due numeri naturali con $k \leq n$ definiamo il seguente simbolo, chiamato *coefficiente binomiale*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Osserviamo che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \text{mentre, se } k \geq 1, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Si verificano facilmente le seguenti eguaglianze

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

in generale

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La seguente identità permette di costruire il cosiddetto *triangolo di Tartaglia*

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (1)$$

Il simbolo del coefficiente binomiale e le sue proprietà sopra enunciate permettono di dimostrare la seguente formula di Newton per il calcolo della potenza n -esima di un binomio. Se a, b sono numeri reali allora per ogni numero naturale n si ha

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (2)$$

Verifichiamo questa formula mediante il principio di induzione.

Per $n = 0$ è vera in quanto si ha

$$1 = (a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0.$$

Verifichiamo che dalla validità della formula per un certo n segue la sua validità per $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} = \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned} \tag{3}$$