CAPITOLO TERZO

CARDINALITÀ

E

ORDINAMENTI SUGLI INSIEMI

1 Breve cenno ad una teoria assiomatica degli insiemi

Anche se l'idea intuitiva di chiamare *insieme* ogni collezione di oggetti sarà sufficiente per quello che diremo in seguito, un' esposizione generale della *Teoria degli Insiemi* richiede più precisione, in quanto senza assiomi espliciti che ci dicano come il termine *insieme* può essere usato e a quali collezioni può essere applicato, possiamo incorrere in varie contraddizioni. Esistono molte teorie assiomatiche degli insiemi ciascuna delle quali presenta dei vantaggi o dei difetti; presentiamo qui, **a titolo di esempio**, una versione basata sull'assiomatica di Bernays-Gödel-von Neumann. L'esposizione non ha la pretesa di essere completa o formale, ne il sistema di assiomi pretende di essere indipendente; questa problematica appartiene al dominio della Logica. Desideriamo solo indicare una struttura con la quale è possibile lavorare e che permette di evitare antinomie o contraddizioni.

Teoricamente, ci piacerebbe avere associato con ogni proprietà p un insieme $E(p)$ consistente si tutti gli oggetti aventi la proprietà p. Supporre che questo sia vero ci conduce immediatamente ci porta immediatamente all'antinomia di Russell che l'insieme di tutti gli insiemi che non sono membri di se stessi: supponiamo che la proprietà

$$p(x) \,=\, [x \ \text{\textit{è}} \ un \ \ insieme] \wedge [x \notin x]$$

determini un certo insieme $\mathcal{R}(p)$, dovremmo concludere che

$$[\mathcal{R}(p) \notin \mathcal{R}(p)] \iff [\mathcal{R}(p) \in \mathcal{R}(p)].$$

Per evitare questa contraddizione, dobbiamo renderci conto che non è il convertire proprietà in collezioni ad indurre l'errore, ma piuttosto l'assumere che $\mathcal{R}(p)$ sia un *insieme* e quindi che abbia il diritto ad essere membro della collezione individuata da p.

L'idea basilare di questo approccio è, che, ci sono due tipi di collezioni: *classi* ed *insiemi.* Euristicamente un insieme è una classe che può essere vista come una singola entità.

I termini indefiniti nello sviluppo assiomatico sono "*classe*" e la relazione diadica $\in$ tra classi; tutte le variabili, come $\mathcal{A}$, A, x, $\cdots$, rappresentano classi, e date due classi, l'affermazione $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ è vera o falsa. Una proprietà p sarà una formula costruita a partire dalle proposizioni $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ per negazione, congiunzione, disgiunzione e quantificazione di classi di variabili mediante il calcolo dei predicati.

Cominciamo definendo che due classi sono uguali se hanno gli stessi membri; formalmente

Definizione 1.

$$[\mathcal{A} \subset \mathcal{B}] \iff [\forall x: \; x \in \mathcal{A} \Longrightarrow x \in \mathcal{B}],$$

$$\text{e} \tag{1}$$

$$[\mathcal{A} = \mathcal{B}] \iff [\mathcal{A} \subset \mathcal{B}] \wedge [\mathcal{B} \subset \mathcal{A}].$$

Questa definizione permette la sostituzione rispetto alla seconda classe variabile nella relazione $x \in \mathcal{A}$, ovvero, $[x \in \mathcal{A}] \wedge [\mathcal{A} = \mathcal{B}] \Longrightarrow [x \in \mathcal{B}]$; ottenere questo richiede anche come prima cosa

I ASSIOMA (di individualità): $[x \in \mathcal{A}] \wedge [x = y] \Longrightarrow [y \in \mathcal{A}]$.

Poi possiamo distinguere tra classi ed insiemi mediante

Definizione 2. *La classe A è chiamata insieme se se esiste una classe $\mathcal{A}$ tale che $A \in \mathcal{A}$.*

Possiamo ora postulare che ogni collezione individuata da una proprietà che caratterizza i suoi membri è una *classe.* Comunqe, poiché i non insiemi non possono essere membri di qualunque cosa, i membri di una classe devono essere *insiemi.* Formuliamo questo mediante

II ASSIOMA (di formazione delle classi)*Per ogni proprietà p nella quale è quantificata una variabile di insiemi e nella quale la variabile dipendente da classi non appare, esiste una classe $\mathcal{A}$ i cui membri sono proprio quegli* insiemi *aventi la proprietà p; in simboli*

$$[x \in \mathcal{A}] \iff [x \text{ è un insieme}] \wedge p(x)$$

Come conseguenza dell'Assioma I, la classe $\mathcal{A}$ è univocamente determinata mediante la proprietà che la definisce; possiamo quindi scrivere $\mathcal{A} = \{x: \; x \text{ è un insieme} \wedge p(x)\}$ oppure $\mathcal{A}(p)$.
Osserviamo che con questa terminologia, l'antinomia di Russell diventa la seguente proposizione innocua

Proposizione 1. *La classe di Russell $\mathcal{R}(p)$ non è un insieme.*

Usando l'Assioma II, le operazioni Booleane tra classi([1])

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x: \; [x \in \mathcal{A}] \vee [x \in \mathcal{B}]\}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x: \; [x \in \mathcal{A}] \wedge [x \in \mathcal{B}]\}.$$

Come pure il prodotto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tra classi è definito ed è una classe.
La classe universale è $\{x: \; [x \text{ è un insieme}] \wedge [x = x]\}$.
La classe nulla $\varnothing$ è $\{x: \; [x \text{ è un insieme}] \wedge [x \neq x]\}$.
$\varnothing$ è unico ed è una sottoclasse di ogni classe.

Le relazioni di equivalenza nelle classi si possono definire come nel precedente paragrafo

Proposizione 2. *Una relazione di equivalenza in una classe $\mathcal{A}$ divide $\mathcal{A}$ in coppie di sottoclassi a due a due disgiunte.*

---

[1] Un'algebra Booleana B è un insieme con due operazioni binarie $+$, $\cdot$ ed un'operazione unitaria $'$, soddisfacenti i seguenti assiomi:

1. Ogni operazione $+$, $\cdot$ è commutativa.
2. Esistono gli elementi 0, 1 tali che per ogni $a \in B$, $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$.
3. Valgono le proprietà distributive:
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
4. Per ogni $a \in B$ $a \cdot a' = 0$ e $a + a' = 1$.

(Non è necessario postulare l'associatività delle operazioni $+$ e $\cdot$, questa è una conseguenza degli assiomi). La collezione di tutti i sottoinsiemi di un insieme E, con le operazioni $+$, $\cdot$, $'$, 0, 1 interpretate come $\cup$, $\cap$, $\mathcal{C}_E$, $\varnothing$, E rispettivamente.

Il prossimo elenco di assiomi garantisce almeno un *insieme* e postula che certe costruzioni che usano insiemi danno la possibiltà di ottenere insiemi.

III Assioma (dell'insieme nullo) *$\varnothing$ è un insieme.*

IV Assioma (delle coppie) *Se A e B sono insiemi distinti, allora $\mathcal{A} = \{x : [x = A] \vee [x = B]\}$ è un* insieme *che contiene esattamente due elementi, e si indica con $\{A, B\}$.*

V Assioma (dell'unione) *Se $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$(2)è una famiglia di insiemi, allora $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} = \{x : \exists\alpha \in \mathcal{A}, x \in A_\alpha\}$ è un insieme.*

VI Assioma (di rimpiazzamento) *Se A è un insieme e se $f : A \longrightarrow \mathcal{A}$ è un'applicazione, allora $f(A)$ è un insieme.*

Il prossimo assioma riguarda la formazione di sottoinsiemi.

VII Assioma (di slittamento)*Se A è un insieme, allora per ogni classe $\mathcal{A}$, $A \cap \mathcal{A}$ è un insieme.*

Proposizione 3. *Se A è un insieme e p è una proprietà nel quale solo la variabile di insieme è quantificata, allora $\{x : [x \in A] \wedge p(x)\}$ che possiamo scrivere $\{x \in A : p(x)\}$ è un insieme.*

Infatti, se $\mathcal{A}$ è una classe determinata da p, abbiamo $A \cap \mathcal{A} = \{x : x \in A \wedge [x \text{ è un insieme}] \wedge p(x)\}$, e imporre che $x \in A$ rende ridondante la frase "[x è un insieme]."

Poichè i membri delle classi devono essere necessariamente insiemi, la precisa definizione di classe potenza $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ di una classe $\mathcal{A}$ è

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} : [\mathcal{B} \text{ è un insieme}] \wedge [\mathcal{B} \subset \mathcal{A}]\}$$

così, anche se A è un insieme, $\mathcal{P}(A)$ ha per membri quelle sottoclassi di A note come insiemi.

VIII Assioma (dell'insieme potenza) *Se A è un insieme, allora anche $\mathcal{P}(A)$ è un insieme.* (3)

Diamo ora degli esempi di come si usano gli assiomi degli insiemi.

Proposizione 4. *Se $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ è una famiglia di insiemi, allora $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ è un insieme.*

Dim. Infatti per l'Assioma V, $S = \{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ è un inisieme; poniamo $p(x) = [\forall\alpha \in \mathcal{A} : x \in A_\alpha]$ nel quale solo la variabile di insieme α è quantificata. La Proposizione 3 dimostra che $\{x \in S : p(x)\}$, che è precisamente $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, è un insieme.

Proposizione 5. *Se A è un insieme, allora lo è anche $\{A\}$.*

Dim. Se $A = \varnothing$ allora per gli Assiomi III e VIII si ha $\{\varnothing\}$ è un insieme. Se $A \neq \varnothing$ allora $\{A, \varnothing\}$ è un insieme pre l'Assioma IV. Indicando con $\mathcal{A}$ la classe determinata dalla proposizione $p(x) = [x = A]$, deduciamo dalla Prposizione 3 che $\{A, \varnothing\} \cap \mathcal{A} = \{A\}$ è un insieme.

Proposizione 6. *Il prodotto cartesiano di due insiemi è un insieme.*

Dim. Siano A, B inisiemi, e per ogni $a_0 \in A$ definiamo l'applicazione $B \longrightarrow A \times B$ mediante $b \longrightarrow (a_0, b)$; per l'Assioma VI, l'immagine $\{a_0\} \times B$ è un insieme; poiché $A \times B = \bigcup\{\{a_0\} \times B : a_0 \in A\}$, l'assioma V dimostra che $A \times B$ è un insieme.

Proposizione 7. *Siano A, B insiemi, allora la classe di tutte le applicazioni $A \longrightarrow B$ è un insieme.*

[2]Facciamo corrispondere ogni elemento α di un insieme $\mathcal{A} \neq \varnothing$ un insieme A_α.
[3]In particolare se $B \subset A$ allora $B \in \mathcal{P}(A)$

Dim. Abbiamo già dimostrato che $A \times B$ è un insieme così, per l'Assioma VIII, $\mathcal{P}(A \times B)$ è anche un insieme. Poiché un'applicazione è una sottoclasse di $A \times B$ determinata dalla proprietà m :

$$f = \{(a, b) : \ \forall a \in A, \ \exists_1 b \in B \ \text{tale che} \ (a, b) \in f\},$$

la Proposizione 3 dimostra che ogni applicazione è un membro dell'insieme $\mathcal{P}(A \times B)$. Di conseguenza la classe di tutte le applicazioni $A \longrightarrow B$ è $\{x \in \mathcal{P}(A \times B) : \ x \text{ ha la proprietà } m\}$, che, sempre per la Proposizione 3, è un insieme.

Proposizione 8. *La classe di tutti gli insiemi non è un insieme.*

Dim. Sia $\mathcal{R}(p)$ la classe di Russell. Se la classe A di tutti gli insiemi fosse un insieme, allora, dall'Assioma VII, si avrebbe che $A \cap \mathcal{R}(p)$ è un insieme; poiché

$$A \cap \mathcal{R}(p) = \{x : \ [x \text{ è un insieme}] \wedge [x \notin x]\} = \mathcal{R}(p),$$

questo contraddice la Proposizione 1.

Aggiungiamo ora il seguente assioma

IX Assioma (di fondazione) *In ogni insieme non vuoto A esiste una $u \in A$ tale che $u \cap A = \varnothing$ (ovvero: $\forall x, \ x \in A \Longrightarrow \neg[x \in u]$)*

Questo assioma stabilisce che ogni insieme non vuoto A deve contenere "atomi" u, che determinano la sua "fondazione." Diamo qualche esempio di come può essere usato.

Proposizione 9.
1. *Nessun insieme non vuoto può essere membro di se stesso.*
2. *Se A, B sono insiemi non vuoti, allora non è possibile che valgano entrambe le relazioni $A \in B$ e $B \in A$.*

Dim. 1. Supponiamo che esista un insieme non vuoto tale che $A \in A$; per la Proposizione 5, anche $\{A\}$ dovrebbe essere un insieme, ed essendo A l'unico elemento di $\{A\}$ l'insieme A non avrebbe una fondazione.
Dim. 2. Si ragiona in maniera analoga alla precedente considerando l'insieme $\{A, B\}$ (vedi Assioma IV).

Andiamo ora a considerare l'esistenza di insiemi infiniti.

X Assioma (di infinità). *Esiste un* **insieme** *A con le proprietà*:
(i) $\varnothing \in A$.
(ii) $a \in A \Longrightarrow a \cup \{a\} \in A$.

Come conseguenza otteniamo

Proposizione 10. *La classe degli interi non negativi è un insieme.*

Dim. Sia A un insieme avente le proprietà dell'Assioma X, e sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A)$ definito nel modo seguente

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(A) : \ B \text{ ha le proprietà dell'Assioma X}\}$$

Ciascun B è un insieme, e per la Proposizione 3 e l'Assioma VIII, lo è anche $\mathcal{B}$; segue quindi dalla Proposizione 4 che $N = \bigcup\{B : \ B \in \mathcal{B}\}$ è anche un insieme. Poiché ogni B ha le proprietà dell'Assioma X, è evidente che anche N le ha. Facendo ora riferimento agli assiomi di Peano per gli interi (vedi il paragrafo successivo) , e chiamando $x \cup \{x\} \in N$ il successivo di $x \in N$, si può facilmente verificare che tutti gli assomi di Peano sono soddisfatti da N (vedi paragrafo successivo). In particolare il principio di induzione matematica è soddisfatto, perché per definizione di N, N non ha sottoinsiemi propri che soddisfano entrambe le proprietà dell'Assioma X. Poiché gli assiomi di Peano sono categorici, segue che N può essere visto come l'insieme degli interi non negativi. Indichiamo: $\varnothing$ con "0," $\{\varnothing\}$ con "1," $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ con "2," e così via.

Una semplice conseguenza di questo, della Porposizione 6 e dell'Assioma VI, è che la classe $\mathbb{Q}$ dei razionali è un insieme. Si dimostra anche che essite una biggezione di $\mathcal{P}(N)$ sui reali; quindi per l'Assioma VI e VIII, $\mathbb{R}$ è un insieme.
Dall'assiomatizzazione fatta segue che l'unico metodo generale di produrre sottoiniemi di un dato insieme è quello fornito dalla Proposizione 3. Per vedere che ci sono sottoinsiemi che ci piacerebbe considerare ma che non possono essere descritti da alcuna proprietà, consideriamo il seguente esempio di Russell.
Sia A una collezione infinita di paia di scarpe; definiamo un insieme consistente di esattamente *una* scarpa per ogni paia mediante la proprietà "scarpa destra." Se ora A è una collezione infinita di paia di calzini, analogamente vogliamo indicare che viene formato un sottoinsieme prendendo esattamente *un* calzino da ogni paio; ma poiché i calzini sono tutti identici tra di loro, non esiste alcuna proprietà che ne caratterizzi esattamente uno di ogni coppia. In particolare non possiamo chiamare una tale collezione *sottoinsieme* di A. Situazioni analoghe capitano spesso in matematica; per dare più larghe possibilità alle considerazioni matematiche, adoperiamo u altro metodo di produrre sottoinsiemi.

XI Assioma (della scelta) *Data una famiglia non vuota* $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *di coppie di insiemi a due a due disgiunti, esiste un* **insieme** S *consistente esattamente di* **un** *elemento per ogni* A_α.

Questo è l'unico assioma *esistenziale* che a differenza di tutti gli altri, un insieme ottenuto con l'applicazione di questo assioma *non* è, in generale, univocamente determinato da condizioni date. È stato dimostrato da K. Gödel nel 1938 che se la teoria degli insiemi basata sugli Assiomi I,..., X è consistente allora anche la teoria degli insiemi basata sugli Assiomi I,..., XI è consistente. Il risultato di Gödel lascia aperta la possibilità che l'Assioma XI sia derivabile dagli altri assiomi, e, nel 1963, P. J. Cohen dimostrò che questo non è possibile. Di conseguenza l'assioma della scelta è indipendente dagli altri assiomi.

Osservazione 1. *Notiamo che richiamarsi all'Assioma XI non è necessario se A è un insieme* **finito**.

Infatti se $A_1, \cdots, A_n$ sono insiemi, allora ciascun A_i contiene qualche elemento a_i, quindi, prendendo come $p_i(x)$ la proprietà $[x = a_i]$, otteniamo $\{x \in \bigcup_1^n A_i : p_1(x) \wedge \cdots \wedge p_n(x)\}$ come insieme che soddisfa le richieste dell'Assioma XI. Comunque, se $\mathcal{A}$ è infinito, anche se, come nell'esempio di Russell, ciascun A_α è finito, un Assioma come l'XI appare necessario. Una proprietà quale "contiene un elemento per ciascun A_α" è illegittima perché taglia fuori sottoinsiemi *unici* ed è evidente che se c'è una collezione soddisfacente il predicato proposto, allora c'è ne sono anche altri (a meno che ciascun A_α consista di un singolo elemento). Prendendo $p_i(x) = [x = a_i]$, la procedura usata sopra per insiemi finiti $\mathcal{A}$ perché una catena infinita di $\vee$ non è una proposizione, ed usare un predicato come $\exists i : p_i(x)$ è inadeguato, poiché assumendo su x che $\neg p_1(x)$, $\neg p_2(x), \cdots$, possiamo concludere in generale che $\forall i : \neg p_i(x)$, ovvero, $\neg \exists i : p_i(x)$ (ovvero, che x appartiene all'insieme determinato da $\exists i : p_i(x)$) senza manomettere con regole della logica del calcolo dei predicati; da questo punto di vista l'Assioma XI è collegato all' $\omega-$incompletezza dei sistemi consistenti.

2 Assiomi di Peano

L'esistenza dei numeri naturali può essere dedotta dai seguenti assiomi

Assiomi di Peano: *esiste una terna* ($\mathbb{N}$, 0, σ) con le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{N}$ è un insieme.
2. 0 è un elemento di $\mathbb{N}$.
3. σ è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ tale che:
    - 3a. σ è iniettiva.
    - 3b. $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$.
    - 3c. se $S \subset \mathbb{N}$ tale che $0 \in S$ e $\sigma(S) \subseteq S$ allora $S = \mathbb{N}$.

Gli assiomi di Peano postulano l'esistenza di un certo insieme; come vedremo più avanti questo è l'unico insieme che verifica queste proprietà (a meno di omomorfismi) e coincide con il noto insieme dei numeri naturali.
Osserviamo in particolare che $\mathbb{N} \neq \varnothing$. Inoltre l'applicazione σ può essere pensata come l'applicazione che ad ogni elemento associa il dsuo "successivo" (se pensiamo ai naturali: ad n associa $n+1$).

Proposizione 11. *Se* ($\mathbb{N}$, 0, σ) *verifica gli assiomi di Peano,* $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dim.
Per la proprietà 3b è equivalente a provare che $\{0\} \cup \sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Poniamo $S = \{0\} \cup \sigma(\mathbb{N})$. per 2 e 3, $S \subset \mathbb{N}$, da cui $\sigma(S) \subset \sigma(\mathbb{N})$ e quindi $\sigma(S) \subset S$. Dall'assioma 3c otteniamo la tesi.

Proposizione 12. *Se* ($\mathbb{N}'$, $0'$, σ') *è un'altra terna che verifica gli Assiomi di Peano, allora esiste un isomorfismo tra* ($\mathbb{N}$, 0, σ) *e* ($\mathbb{N}'$, $0'$, σ')*, cioé esiste una (unica) applicazione biunivoca* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ *tale che*

$$\begin{cases} \varphi(0) \;=\; 0' \\ \\ \varphi(\sigma(n)) \;=\; \sigma'(\varphi(n)) \end{cases} \tag{2}$$

Dim. Dalla Proposizione 11 segue che φ è definita su tutto $\mathbb{N}$. Dimostriamo che è surgettiva. Poniamo $S' = \varphi(\mathbb{N})$. Sia ha che $\varphi(0') \in S'$. Inoltre $\sigma'(S') \subset S'$, perché $y \in \sigma'(S') \Rightarrow \exists x \in S' : \; y = \sigma'(x)$ da come è definito S' si ha che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = \varphi(n)$ e quindi $y = \sigma'(\varphi(n))$ che per definizione di φ risulta uguale a $\varphi(\sigma(n))$, ed essendo $\sigma(n) \in \mathbb{N}$ segue che $y = \varphi(\sigma(n)) \in S'$. Dall'assioma 3c applicato a σ' si ha che $S' = \mathbb{N}'$. Dimostriamo l'iniettività di φ.
Poniamo

$$S = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(m) = \varphi(n) \iff m = n\}.$$

Osserviamo che $0 \in S$. Inoltre se $[\varphi(m) = \varphi(0)] \wedge [m \neq 0]$ allora $\varphi(m) = 0'$; sia poi $h \in \mathbb{N}$ tale che $m = \sigma(h)$ allora si ha l'assurdo perché, per definizione di φ, $\varphi(m) = \sigma'(\varphi(h)) \neq 0'$, per l'assioma 3b applicato a σ'. Inoltre $\varphi(S) \subset S$, perché se per assurdo esistesse $[y \in \sigma(S)] \wedge [y \notin S]$, allora esiste $y' \in \mathbb{N}$, $y' \neq y$, tale che $\varphi(y) = \varphi(y')$. Se x', $x \in \mathbb{N}$ sono tali che $y = \sigma(x)$, $y' = \sigma(x')$, otteniamo che $\sigma(x') \neq \sigma(x)$, quindi, per l'iniettività di σ, $x' \neq x$. Inoltre $\varphi(\sigma(x')) = \varphi(\sigma(x))$, da cui $\sigma'(\varphi(x')) = \sigma'(\varphi(x))$, questo implica,per l'iniettività di σ', che $\varphi(x') = \varphi(x)$, essendo $x \in S$, otteniamo $x = x'$, che è in contraddizione con quanto affermato sopra.

3 Insiemi equipotenti, cardinalità

Il concetto di *cardinalità* è legato semplicemente alla "grandezza" di un insieme: vogliamo determinare se dati due insiemi uno ha più elementi dell'altro. Il contare non è necessario per fare questo (anche perché se gli elementi sono infiniti non è un'impresa facile....) basterà accoppiare un elemento di un insieme a quello dell'altro e vedere se ne avanza qualcuno. Avere la stesa grandendezza per due insiemi è formalizzato dalla seguente

Definizione 1. *Due insiemi A, B si dicono* **equipotenti,** *e si scrive $A \sim B$ se e solo se essi sono in corrispondenza biunivoca. Diremo in tal caso che A e B hanno la stessa* **cardinalità** *o* **potenza**.
Scriveremo card A = card B.

È evidente che l'equipotenza è una relazione di equivalenza nella classe di tutti gli insiemi, forma quindi una partizione di sottoclassi chiamate *classi equipotenti.*

Esempio 1. Sia $A = \{2n : \; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Allora *card* A = *card* $\mathbb{N}$, infatti possiamo considerare l'applicazione $n \longrightarrow 2n$. questa è una bigezione di $\mathbb{N}$ su A. Si osservi dunque che un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme.

Esempio 2. Ogni intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ è equipotente a $(0, 1)$.

Basta infatti considerare la bigezione $x \longrightarrow b\,x + (1-x)a$ di $(0,1)$ su (a, b).

Esempio 3. L'intervallo $(0, 1)$ e $\mathbb{R}$ sono equipotenti. Basta infatti considerare l'applicazione di $x \longrightarrow \dfrac{x}{1+|x|}$ di $\mathbb{R}$ in $(0, 1)$.

Esempio 4. Sia $A = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ dove n è un numero naturale diverso da zero. Diremo che A ha cardinalità n. Mentre la cardinalità di $\varnothing$ è 0. Un insieme equipotente ad A si dice che ha **cardinalità finita**. Chiameremo **finiti** gli insiemi con cardinalità finita, gli altri **infiniti.**

L'insieme di tutti i numeri naturali è infinito. Indicheremo la sua cardinalità con $\aleph_0$ (alef zero). Un insieme di potenza $\aleph_0$ si dice **numerabile.**

Siano A e B insiemi disgiunti di cardinalità, rispettivamente, α e β; definiamo $\alpha + \beta$ (**somma** di α e β) come la cardinalità di $A \cup B$, mentre $\alpha\,\beta$ (**prodotto** di α e β) come la la cardinalità di $A \times B$. Nel caso di insiemi finiti, queste definizioni coincidono proprio con la consueta somma ed il prodotto di numeri naturali. L'insieme delle applicazioni di A in B si indica con B^A, e la sua cardinalità con β^α; anche in questo caso, se α, β sono finiti e nonè α=β=0, ritroviamo la potenza di un numero naturale con esponente naturale([4]).

Teorema 1. *Se n è un cardinale finito, si ha $n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$; se poi $n \neq 0$ si ha anche $n\,\aleph_0 = \aleph_0$.*

Dim.
Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali; N' quello dei naturali $\geq\ n$; allora $\mathbb{N} \sim N'$ perché esiste una corrispondenza biunivoca $i \longrightarrow i + n$, $i \in \mathbb{N}$; poiché $\mathbb{N} = N' \cup \{0, 1, \cdots, n-1\}$, ciò prova che $n + \aleph_0 = \aleph_0$.

Sia P l'insieme dei naturali pari, D quello dei dispari; sono equipotenti ad $\mathbb{N}$, come si vede dalle corrispondenze biunivoche $i \longrightarrow 2i$ e $i \longrightarrow 2i + 1$, $i \in \mathbb{N}$; poiché $P \cup D = \mathbb{N}$, ciø' prova che $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Si ha $\{0, 1, \cdots, n-1\} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, perché vi è la corrispondenza biunivoca $(i, k) \longrightarrow i + nk$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, $k \in \mathbb{N}$; quindi $n\,\aleph_0 = \aleph_0$.

Definizione 2. *Se α e β sono numeri cardinali, si dice che α è* **minore** *di β, o che β è* **maggiore** *di α, e si scrive $\alpha < \beta$ o $\beta > \alpha$, se $\alpha \neq \beta$, e se esitono due insiemi A, B di cardinalità α, β tali che $A \subset B$. Questa definizione coincide con la solita se α e β sono numeri naturali. In generale se A e B due insiemi qualunque, diremo che card $A \leq$ card B se esiste un applicazione iniettiva di A in B.*

Si osservi che l'esistenza di un'applicazione iniettiva di A in B non esclude l'esistenza di una bigezione.

Esercizio **1.**

(a) *card $A \leq$ card X per ogni sottoinsieme $A \subset X$.*

(b) *Se esiste un'applicazione surgettiva $f : X \longrightarrow Y$, allora card $Y \leq$ card X*

Teorema 2. *Se α è un numero cardinale, si ha $2^\alpha > \alpha$; inoltre, se A è un insieme di cardinalità α, 2^α è la cardinalità della famiglia dei sottoinsiemi di A.*

Dim.
Se $\alpha = 0$ il risultato è banalmente vero. Sia $\alpha \neq 0$.
Dimostriamo l'ultima parte; sia $\mathcal{F}$ la famiglia descritta; si pone una corrispondenza biunivoca fra tutto $\{0, 1\}^A$ e tutto $\mathcal{F}$ nel modo seguente: se $\varphi \in \{0, 1\}^A$, ossia se φ è un'applicazione di A su $\{0, 1\}$, a φ si fa

[4] Nel caso di insiemi finiti, si dimostra facilmente per induzione su α.

corrispondere l'elemento $B \in \mathcal{F}$ dato da $B = \varphi^{-1}1$. Questa è una corrispondenza biunivoca tra tutto $\{0,\, 1\}^A$ e tutto $\mathcal{F}$.
Per dimostrare la prima parte basta dimostrare che $\mathcal{F}$ ha cardinalità maggiore di A; intanto, $\mathcal{F}$ contiene un sottoinsieme equipotente ad A, ossia l'insieme di tutti gli $\{a\}$, al variare di $a \in A$; basta dimostrare che A ed $\mathcal{F}$ non sono equipotenti.
Supponiamo per assurdo che lo siano, e sia μ un'applicazione biunivoca di A su tutto $\mathcal{F}$; poniamo $B = \{a : a \in A,\, a \notin \mu a\}$. Essendo μ surgettiva sia $b \in A$ tale che $B = \mu b$. Se risulta $b \in B = \mu b$, allora $b \notin B$, per definizione di B. Quindi $b \notin B = \mu b$, ossia $b \in B$. assurdo, quindi μ non esiste.

Per il Teorema 2 si ha in particolare $2^{\aleph_0} > \aleph_0$; la cardinalità $2^{\aleph_0}$ viene generalmente indicata con **c** e chiamata **cardinalità del continuo,** si dimostra che è la cardinalità di $\mathbb{R}$. Cantor si era posto la domanda se esistesse una cardinalità intermedia tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$. Ovvero esiste un numero cardinale tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$? Il problema è stato risolto nel 1963 da Paul Cohen: *non è possibile dimostrare nè che la risposta è sì nè che la risposta è no. Sia la risposta sì che la risposta no sono compatibili con gli assiomi su cui si basa la teoria degli insiemi.*

Diamo ora una definizione di *propodotto cartesiano* tra famiglie di insiemi. Vedremo che tale definizione risulta essere diversa da quella data in precedenza nel caso di prodotto cartesiano tra due insiemi.

Definizione 3. *Siano A_i, con $i \in I \neq \varnothing$, degli insiemi; si chiama* **prodotto cartesiano** *degli A_i, e si indica con $\bigtimes_{i\in I} A_i$, l'insieme delle applicazioni φ di I su $\cup_{i\in I} A_i$, tali che $\varphi i \in A_i$ per ogni $i \in I$*

Osserviamo che nel caso che I sia finito, questa definizione non coincide con quella già data in precedenza, però le due definizioni danno origine a due insiemi equipotenti. Ad esempio se $card I = 2$ basta far corrispondere ad (a_1, a_2) l'applicazione φ tale che $\varphi 1 = a_1$ e $\varphi 2 = a_2$.

Ad esempio se scriviamo $\bigtimes_{i=1,\cdots,n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ osserviamo che $(A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times A_2 \times A_3$.
Mentre invece $(A_1 \times A_2) \times A_3 \sim A_1 \times A_2 \times A_3$.
Infatti: un elemento di $(A_1 \times A_2) \times A_3$ è un'applicazione φ che fa corrispondere ad 1 un elemento α di $A_1 \times A_2$ (ossia un'applicazione $\alpha 1 = a_1$, $\alpha 2 = a_2$), e a 3 un elemento di A_3. A questa φ corrisponde la φ' di $A_1 \times A_2 \times A_3$ tale che $\varphi' i = a_i$, $i = 1, 2, 3$.

Un ulteriore chiarimento relativo alla notazione sopra può essere dato dal seguente esempio.
Consideriamo $B_4 = A_1$, $B_5 = A_2$, $B_6 = A_3$, allora $B_4 \times B_5 \times B_6 \neq A_1 \times A_2 \times A_3$ in quanto il primo insieme consiste di applicazioni definite su $\{4, 5, 6\}$, il secondo di applicazioni definite su $\{1, 2, 3\}$. Possiamo però scrivere $B_4 \times B_5 \times B_6 \sim A_1 \times A_2 \times A_3$. Infatti possiamo definire un'applicazione biunivoca tra i due insiemi che fa corrispondere alla $\varphi \in B_4 \times B_5 \times B_6$ la $\psi \in A_1 \times A_2 \times A_3$ data da $\psi 1 = \varphi 4$, $\psi 2 = \varphi 5$, $\psi 3 = \varphi 6$.
Osserviamo che esiste anche un'applicazione biunivoca tra $A \times B$ e $B \times A$ definita da $(a, b) \longrightarrow (b, a)$.

Useremo la notazione $\times_{i\in I} a_i$ per indicare l'elemento $\varphi \in \bigtimes_{i\in I} A_i$. dato da $\varphi i = a_i$.

Possiamo ora enunciare il seguente

Assioma della scelta o di Zermelo.

Primo enunciato: *data una famiglia $\mathcal{F}$ non vuota di insieme non vuoti a due a due disgiunti, esiste un sottoinsieme G della loro unione tale che $G \cap A$ ha cardinalità 1 per ogni $A \in \mathcal{F}$.*

Secondo enunciato: *un prodotto cartesiano di insiemi è vuoto se e solo se è vuoto almeno un fattore.*

Teorema 3. *I due enunciati dell'asioma della scelta o di Zermelo sono equivalenti*

Dim.

Supponiamo sia vero il secondo enunciato. Poiché gli elementi di $\mathcal{F}$ sono non vuoti, il loro prodotto cartesiano contiene un elemento, ossia contiene un'applicazione φ tale che $\varphi i \in A_i$ per ogni $A_i \in \mathcal{F}$; ed allora il G richiesto è $\bigcup_{i\in I}\{\varphi i\}$.

Sopponiamo ora vero il primo enunciato. Sia $P = \bigtimes_{i\in I} A_i'$. Se uno degli A_i' è vuoto, è vuoto anche P, perché un $\varphi \in P$ dovrebbe far corrispondere a qualche $i \in I$ un elemento di $\varnothing$, il che è impossibile.

Se invece ogni A' è non vuoto, si pone, per ogni $i \in I$, $A_i = \{i\} \times A'_i$; gli A_i sono a due a due disgiunti e quindi esiste un G tale che, per ogni i, $G \cap A_i$ consista di un solo elemento, per esempio $G \cap A_i = \{i \times a'_i\}$, $a'_i \in A'_i$; allora $\times_{i \in I} a'_i \in \times_{i \in I} A'_i$, come afferma il secondo enunciato.

Teorema 4. *Un insieme è infinito se e solo se contiene un sottoinsieme numerabile. In altre parole: un cardinale α è transfinito se e solo se $\alpha \geq \aleph_0$.*

Dim. Sia A un insieme; se esso è finito, certamente non contiene insiemi numerabili; basta perciò dimostrare che se è infinito, ossia non finito, ne contiene. A tale scopo, per ogni numero naturale $n > 0$ sia F_n l'insieme delle applicazioni biunivoche di $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ su A. gli F_n sono non vuoti a due a due disgiunti, esiste quindi, per l'assioma della scelta, un sottoinsieme G di $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ che ha in comune con F_n esattamente un elemento, per esempio φ_n, e ciò per ogni n. Si può allora definire un'applicazione biunivoca φ, su A, dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali nel modo seguente:
$\varphi 0 = \varphi_1 0$; supposti definiti $\varphi 0$, $\varphi 1$, $\varphi(n-1)$, definiremo $\varphi n = \varphi_{n+1} h$, dove h è il più piccolo numero intero tale che $\varphi_{n+1} h \notin \varphi\{0, 1, n-1\}$.
L'insieme $\{\varphi n : \ n \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme numerabile di A.

In sostanza, il procedimento della dimostrazione, descritto in maniera intuitiva, consiste nello scegliere in A un elemento, poi un altro, poi ancora un altro, e così via. Essendo A infinito non ci può essere il pericolo di non trovare "un altro" elemento. L'assioma della scelta garantisce poi di poter fare tutte le infinite scelte, pur senza aver dato una regola per farle. Si tenga presente però che l'assioma garantisce questa possibilità solo quando gli insiemi da cui si sceglie siano già dati, mentre se si procede soltanto nella maniera intuitiva questo non avviene. Per questo motivo nella dimostrazione abbiamo dovuto costruira la famiglia di insiemi Fn.

Corollario 1. *Un insieme è infinito se e solo se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.*

Dim. Se l'insieme A è infinito non è certo equipotente ad un proprio sottoinsieme proprio. Se è infinito esso contiene per il Teorema 4 un sottoinsieme numerabile B; sia $b \in B$, $B' = B \backslash \{b\}$, $C = A \backslash B$, $A' = B' \cup C$. Si ha $B \sim B'$ (ovviamente i naturali sono in corrispondenza biunivoca con i naturali positivi mediante $n \longrightarrow n+1$); quindi $A = B \cup C \sim B' \cup C = A'$, in quanto $C \sim C$ e $B \cap C = \varnothing$; ma $A' \subset A$.

Possiamo ora enunciare un teorema fondamentale della teoria degli insiemi.

Teorema 5. di Cantor - Schöder - Bernstein
Due insiemi, ciascuno dei quali è equipotente ad un sottoinsieme dell'altro, sono equipotenti.

Dim.
Sia f un'applicazione iniettiva di X in Y, e sia g un'applicazione iniettiva di Y in X. Dobbiamo costruire un'applicazione biunivoca tra X e Y.
Non è restrittivo supporre che X e Y siano insiemi disgiunti.
Diremo che un elemento x in X è il *genitore* dell'elemento $f(x)$ in Y e, similmente, un elemento $y \in Y$ è il genitore di $g(y) \in Y$.
Ciascun elemento $x \in X$ ha una successione infinita di *discendenti,* e cioè:
$f(x)$, $g(f(x))$, $f(g(f(x)))$, $\cdots\cdots$ ecc.;
similmente, i discendenti di un elemento $y \in Y$ sono
$g(y)$, $f(g(y))$, $g(f(g(y)))$, $\cdots\cdots$ ecc.
Questa definizione implica che ciascun termine della successione è un discendente di tutti i termini precedenti; diremo anche che ciascun termine nella successione è un *antenato* di tutti i termini che lo seguono.
Per ciascun elemento (in X o in Y) deve verificarsi una di queste tre eventualità. Se noi risaliamo l'albero genealogico dell'elemento più indietro possibile, arriviamo ad un elemento X che non ha genitore (questi orfani

sono esattamente gli elementi di $X \setminus g(Y)$), oppure ad un elemento di Y che non ha genitore ($Y \setminus f(X)$), oppure possiamo continuare a risalire all'infinito.
Sia X_X l'insieme degli elementi di X che hanno origine in X (X_X consiste degli elementi di $X \setminus g(Y)$ e di tutti i loro discendenti in X.)
Sia X_Y l'insieme di quegli elementi di X che hanno origine in Y (X_Y consiste di tutti i discendenti in X degli elementi di $Y \setminus f(X)$.)
Sia X_∞ l'insieme di quegli elementi di X che non hanno un antenato orfano.
Dividiamo in maniera analoga Y nei tre insiemi Y_X, Y_Y, Y_∞.
Se $x \in X_X$, $f(x) \in Y_X$, e, di fatto, la restrizione di f a X_X è una corrispondenza biunivoca tra X_X e Y_X.
Se $x \in X_Y$, x appartiene al dominio della funzione inversa g^{-1} e $g^{-1}(x) \in Y_Y$; di fatto, la restrizione di g^{-1} a X_Y è una corrispondenza biunivoca tra X_Y e Y_X. Infine se $x \in X_\infty$, risulta $f(x) \in Y_\infty$, e la restrizione di f a X_∞ è una corrispondenza biunivoca tra X_∞ e Y_∞; (osserviamo che, analogamente, se $x \in X_\infty$, risulta $g^{-1}(x) \in Y_\infty$, e la restrizione di g^{-1} a X_∞ è una corrispondenza biunivoca tra X_∞ e Y_∞.
Mettendo insieme queste tre corrispondenze biunivoche otteniamo una corrispondenza biunivoca tra X e Y.

4 Altri tipi di relazioni binarie sugli insiemi

Diremo che un relazione binaria R su un insieme A è **antisimmetrica** se

$$xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y$$

Definizione 4. *Una relazione binaria R su di un insieme A si chiama* **relazione d'ordine** *o* **ordinamento** *se è* riflessiva, simmetrica *e* transitiva. *Scriveremo $a \preceq b$ anziché aRb.*

In taluni casi possono anche utilizzare i seguenti simboli
$x \succeq y$ con il significato $y \preceq x$
$x \prec y$ con il significato $x \preceq y \wedge x \neq y$
$x \succ y$ con il significato $y \prec x$.

Definizione 5. *Una relazione d'ordine $\preceq$ su un insieme A si dice che è* **totale***, ovvero che è un* **ordinamento totale***, se*

$$\forall x, y \in A, \quad x \preceq y \ \vee \ y \preceq x.$$

In tal caso diremo che A è totalmente ordinato *mediante $\preceq$.*

Esempio 1. In $\mathbb{R}$ $\leq$ è un ordinamento totale.

Esempio 2. In $\mathbb{C}$ definiamo la relazione binaria: $z_1 R z_2$ se e solo se $|z_1| \leq |z_2|$. Osserviamo che questa relazione è *riflessiva* e *transitiva*, ma non *antisimmetrica*. Infatti, ad esempio $iR1$, e $1Ri$, perché $|i| = |1|$, ma ovviamente $1 \neq i$.

Esempio 3. In $\mathcal{P}(A)$ la relazione binaria: ARB se e solo se $A \subset B$, è un ordinamento. Non è invece un ordinamento totale perché, ad esempio, non si verificano $A \subset B$ o $B \subset A$ se $A \cap B = \varnothing$.

Esempio 4.

Definizione 6. *Sia A un insieme con l'ordinamento $\preceq$.*
Un elemento $a \in A$ si dice **massimo** *(***minimo***)se $\forall b \in A$, $b \preceq a$ ($a \preceq b$).*
Se $B \subset A$, chiameremo **maggiorante** *di B (***minorante** *di B) ogni elemento $a \in A$ tale che $\forall b \in B$, $b \preceq a$ ($a \preceq b$)*
*L'***estremo superiore** *di B è, se esiste, il minimo maggiorante di B. L'***estremo inferiore** *di B è, se esiste, il massimo minorante di B.*
Un **segmento** *di A è un sottoinsieme S di A tale che: $\forall s \in S$ si ha che $a \in S$ non appena $a \in A$ e $a \preceq s$.*
Se $a \prec b \prec c$ diciamo che b è **tra** *a e c.*
Un segmento proprio e non vuoto di un insieme totelmente ordinato A si dice che determina un salto *se S ha massimo e $A \setminus S$ ha minimo; diremo che S determina una* **lacuna** *se nè S ha massimo nè $A \setminus S$ ha minimo.*
Un sottoinsieme B è **denso** *in A se tra due elementi distinti di A ve n'è almeno uno di B, ovvero $\forall a, c \in A$ esiste $b \in B$ tale che $a \prec b \prec c$.*

Proposizione 13. *Un insieme totalmente ordinato e non vuoto è denso in sè se e solo se non ha salti (ossia se e solo se nessun suo segmento proprio e non vuoto determina un salto).*

Dim. Sia A l'insieme totalmente ordinato e non vuoto. Se S è un suo segmento che determina un salto, siano M il massimo di S ed m il minimo di $A \setminus S$; allora non vi sono elementi di A tra M e m, e perciò A non è denso in sè.
Viceversa, se A non è denso in sè, siano M, $m \in A$ tali che $M \prec m$, e tali che tra essi non vi siano elementi di A. Sia $s = \{a :\ a \in A,\ a \prec M\}$; allora S è un segmento avente S come massimo, mentre m è il minimo di $A \setminus S$, onde S determina un salto.

Esempio 1. Nell'insieme dei numeri interi ordinato con $<$, ogni segmento proprio e non vuoto determina un salto; nessun segmento proprio e non vuoto determina una lacuna.

Esempio 2. Nell'insieme dei numeri razionali (ordinato con $<$) nessun segmento proprio e non vuoto determina un salto; certi segmenti determinano una lacuna:per esempio

$S = \{x :\ x < 0\} \cup \{x :\ x \geq 0,\ x^2 < 2\}$.

Definizione 7. *Un insieme totalmente ordinato e non vuoto dicesi un* **insieme continuo** *se è privo di: minimo, massimo, salti, lacune.*

Osserviamo che un insieme di questo tipo è denso in sè per la Proposizione 13.

Definizione 8. *Un insieme ordinato e non vuoto è* **completo** *se è privo di minimo, massimo e salti, e se inoltre non è denso in nessun soprainsieme proprio ordinato che sia privo di minimo , massimo e salti.*

Teorema 6. *Un insieme totalmente ordinato e non vuoto è completo se e solo se è continuo.*

Dim.
Sia A continuo, e sia B un suo soprainsieme ordinato, privo di massimo, minimo, e salti; supponiamo che A sia denso in B; dobbiamo dimostrare che $B = A$. Se $b \in B$, sia $S = \{a :\ a \in A,\ a \preceq b\}$; allora S è un segmento non vuoto di A. Esitono dei $b' \succ b$ in B e degli elementi di A tra b e b'; tali elementi non appartengono ad S, e perciò $S \subset A$. Se S ha un massimo M, intanto $M \in A$; poi, $M = b$, perché altrimenti esisterebebro altri elementi di A tra M e b, ed M non sarebbe il massimo di S. In tal caso perciò $b = M \in A$. Se invece S non ha massimo, essendo A continuo ne segue che $A \setminus S$ ha minimo m; ed allora $b \prec m$, e fra b e m non esistono elementi di A; ciò è assurdo e si conclude che questo caso non si può dare, ossia $B = A$.

Sia A completo; occorre dimostrare che non ha lacune. S è un segmento di A che determina una lacuna, si pone $B = A \cup \{S\}$ e si ordina B come segue:
se due elemeni di B sono anche elementi di A, diremo che uno precede l'altro se ciò è vero in A; se invece $a \in A$, diremo che $a \prec S$ se $a \in S$, e che $S \prec a$ se $a \notin S$.

1. $A \subset B$, perché $S \notin A$ (se per caso S fosse anche un elemento di A, basta sostituirlo con, per esempio, un $x \notin A$.

2. B è un soprainsieme ordinato di A : infatti si controlla che la relazione binaria $\prec$ è transitiva, ma non simmetrica, anche in B dati poi due elementi distinti a, b di B, o essi sono in A, ed allora uno precede l'altro, oppure uno di essi, per esempio b è S, ed allora o $a \prec S$ (ossia $a \in S$) o $a \succ S$ (ossia $a \notin S$).

3. B non ha nè minimo nè massimo: un minimo potrebbe solo essere S, ma non lo è perché è non vuoto. Analogamente S non è massimo perché $A \setminus S \neq \varnothing$.

4. B non ha salti: fra due elementi di B che siano anche elementi di A vi è certo un elemento di A; fra a e S (con $a \in A$) vi è un elemento di A se $a \prec S$, perché altrimenti a sarebbe il massimo di S (questo non è possibile perché S determina una lacuna in A); e vi è un elemento di A anche se $a \succ S$ (altrimenti $A \setminus S$ avrebbe a come minimo).

5. A è denso in B : già visto in 4.

L'esitenza di B, sotto l'ipotesi che A abbia lacune, mostra che A non era completo; ciò è una contraddizione, e quindi A è continuo.

Esempio. L'insieme dei reali, ordinato mediante $<$, è continuo.

5 Completamento di un insieme ordinato

Sia A un insieme totalmente ordinato non vuoto, privo di minimo, massimo, e salti; si chiama **completamento** di A ogni soprainsieme ordinato completo di A in cui A sia denso.

Teorema 7. *Sia A un insieme con le proprietà sopra elencate; allora A possiede completamenti. Se B, B' sono due di essi, esiste una unica similitudine([5]) φ di B su B' tale che $\varphi a = a$ per ogni $a \in A$; tale φ è su tutto B'.*

Dim. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei segmenti propri non vuoti di A che sono privi di massimo, e si ordini $\mathcal{S}$ mediante $\subset$; dimostriamo che $\mathcal{S}$ è continuo. Osserviamo innanzi tutto che $a \in A$ determina un $S_a \in \mathcal{S}$ così definito:

$$S_a = \{x : \ x \in A, \ x \prec a\};$$

infatti l'assenza di salti assicura che S_a non ha massimo.

1. $\mathcal{S}$ non ha minimo: se infatti $S \in \mathcal{S}$, e se $a \in S$, si ha $S_a \subset S$.
2. $\mathcal{S}$ non ha massimo: se $S \in \mathcal{S}$ ed $a \notin S$, e $b \succ a$, si ha $S \subset S_b$.
3. S non ha salti: siano $S, T \in \mathcal{S}$, ed $S \subset T$, sia $a \in T \setminus S$, e sia $b \in T$ con $b \succ a$; allora $S \subset S_b \subset T$; quindi $\mathcal{S}$ è denso in sè, e non ha salti per la Proposizione 13
4. $\mathcal{S}$ non ha lacune: sia Σ un segmento proprio e non vuoto di $\mathcal{S}$, privo di massimo; si deve dimostrare che $\mathcal{S} \setminus \Sigma$ ha minimo. Sia T l'unione degli $S \in \Sigma$; come unione di segmenti di A, T è segmento di A; è non vuoto; se M è maggiorante di Σ, e se $b \in A \setminus M$ b è maggiorante di T; T non ha massimo perchè un suo massimo apparterrebbe a qualche $S \in \Sigma$ e ne sarebbe il massimo. Quindi $T \in \mathcal{S}$, ma $T \notin \Sigma$, perchè altrimenti ne sarebbe il massimo. T è infine il minimo di $\mathcal{S} \setminus \Sigma$: se infatti $Z \in \mathcal{S} \setminus \Sigma$, si ha $Z \not\subseteq S$ e per ogni $S \in \Sigma$ (altrimenti $Z \in \Sigma$), e perciò $S \subset Z$ per ogni tale S; quindi $T \subseteq Z$.

Da 1, 2, 3, 4 segue che $\mathcal{S}$ è continuo, e quindi completo per il Teorema 6. Gli S_a, per $a \in A$, formano un sottoinsieme ordinato A' di $\mathcal{S}$, e la $a \longrightarrow S_a$ è una similitudine di A su tutto A'; inoltre A' è denso in $\mathcal{S}$, come si è visto in 3. Ed allora $\mathcal{S}$ è un completamento di A', ed un completamento di A si ottiene sostituendo, in $\mathcal{S}$, ogni S_a col corrispondente $a \in A$.

Completiamo la dimostrazione del teorema provando che se B è un completamento di A, vi è un'unica similitudine φ di B su $\mathcal{S}$ tale che $\varphi a = S_a$ per ogni $a \in A$; bisogna dimostrare anche che φ è surgettivo su $\mathcal{S}$. Sia $b \in B$, poniamo $\varphi b = \{a : \ a \in A, a \prec b\}$, onde $\varphi b \in \mathcal{S}$; ovviamente ordinata,([6]) ed è biunivoca: se $b \prec c \in B$, siano $a, d \in A$ tali che $b \prec a \prec d \prec c$; allora
$\varphi b \subset \varphi a = S_a \subset S_d = \varphi d \subseteq \varphi c$. Perciò φ è una similitudine. Inoltre, φ è su tutto $\mathcal{S}$:
se infatti $S \in \mathcal{S}$, ne sia b l'estremo superiore in B allora $S = \varphi b$.
Dimostriamo l'unicità di φ : se ψ è una similitudine di B su $\mathcal{S}$, con $\psi a = S_a$ per $a \in A$, sia $b \in B$. Se $a \in A$ si ha $a \in \psi b$ se e solo se $S_a \subset \psi b$, ossia se e solo se $\psi a \subset \psi b$, $a \prec b$ in B; e quindi se e solo se $a \in \varphi b$; perciò $\psi b = \varphi b$.

Il teorema appena dimostrato può essere esposto in modo più discorsivo dicendo che un insieme totalmente ordinato A con le proprietà assunte nel Teorema 7 ha un completamento, che è unico a meno di similitudini; verrà quindi chiamato **il** completamento di A.

[5] φ è una *similitudine* se è biunivoca e $a \prec b$ ogniqualvolta $\varphi a \prec \varphi b$.
[6] φ si dice *ordinata* se $\varphi a \preceq \varphi b$ ogniqualvolta $a \preceq b$.

Teorema 8. *Sia A un insieme totalmente ordinato; esso è privo di lacune se e solo se ogni sottoinsieme non vuoto di A, dotato di maggiorante, ha estremo superiore.*

Dim.
Supponiamo che A sia privo di lacune, e sia B un suo sottoinsieme con le proprietà descritte; sia S l'insieme degli $a \in A$ ciascuno dei quali precede o è uguale a qualche elemento di B; allora S è un segmento non vuoto di A. Se S ha un massimo M, M è il massimo di B, e ne è quindi l'estremo superiore. Se S non ha massimo, intanto si deve avere $S \subset A$ perché il caso $S = A$ si può avere solo quando l'unico maggiorante di B è il massimo di A e quindi di S. Ed allora $A \setminus S$ deve avere un minimo m, che è il minimo elemento di A che segue ogni elemento di B; m è cioè l'estremo superiore di B.

Viceversa, supponiamo che A abbia una lacuna, determinata dal segmento S; allora S è sottoinsieme non vuoto di A, dotato di un maggiorante (perché $S \subset A$), ma privo di estremo superiore.

Esempio L'insieme dei reali è il completamento dell'insieme dei razionali (ambedue ordinati mediante $<$).
Si osservi, in particolare, che, per il Teorema 6, è dunque un insieme continuo e quindi privo di lacune. Il Teorema 8 dimostra quella che è la nota proprietà dei reali: ogni sottoinsieme non vuoto limitato superiormente ammette estremo superiore.