

CORSO DI LAUREA IN FISICA

ANALISI MATEMATICA I

BREVI RICHIAMI DELLA TEORIA DEI LIMITI

1. Confronto di infinitesimi.

Sia A sottoinsieme di \mathbb{R} , sia x_0 punto di accumulazione di A nella topologia di $\overline{\mathbb{R}}$ (quindi può anche essere $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$ e siano f e g due funzioni reali definite in A le quali siano *infinitesime* per x che tende a x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Definizione 1. Diciamo che f e g sono **infinitesime (per x che tende a x_0) dello stesso ordine** se esistono un numero reale $K \neq 0$, un intorno V di x_0 ed una funzione reale h , definita su $V \cap A \setminus \{x_0\}$ e **infinitesima per x che tende a x_0** , tali che

$$f(x) = g(x)\{K + h(x)\}, \quad \forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \quad (1)$$

Definizione 2. Diciamo che f è un **infinitesimo per x che tende a x_0 di ordine superiore a g** , oppure g è un **infinitesimo di ordine inferiore a f** se esiste un intorno V di x_0 ed una funzione h definita su $V \cap A$ e infinitesima per x che tende a x_0 tali che

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \quad \forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\}. \quad (2)$$

Facciamo alcune considerazioni in merito a queste definizioni. Innanzitutto è ragionevole attendersi che accanto alla relazione (1) debba sussistere una analoga relazione in cui f e g sono “scambiate di posto”. In effetti è così. Supponiamo che valga la relazione (1); per le ipotesi fatte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{K + h(x)\} = K \neq 0$$

e quindi esiste un intorno U di x_0 tale che

$$K + h(x) \neq 0 \quad \forall x \in U \cap V \cap A \setminus \{x_0\} = W \cap A \setminus \{x_0\}$$

(si è posto $W = U \cap V$; W è ancora intorno di x_0). Allora in $W \cap A \setminus \{x_0\}$ è definita la funzione $\frac{1}{K + h(x)}$ e sussiste la relazione

$$\frac{1}{K + h(x)} = \frac{1}{K} - \frac{h(x)}{K[K + h(x)]}, \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{x_0\}. \quad (3)$$

Da (1) e (3) segue che

$$g(x) = f(x) \left\{ \frac{1}{K} + v(x) \right\} \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{x_0\}$$

dove, $\frac{h(x)}{K[K+h(x)]}$ è una funzione definita in $W \cap A \setminus \{x_0\}$ e infinitesima per x che tende a x_0 .

Dalla relazione (1) segue che f si annulla in un punto $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ se e solo se g si annulla in x e quindi, in un intorno di x_0 , f e g sono entrambe diverse da zero oppure “hanno gli stessi zeri”. Supponiamo che f e g siano diverse da zero in un intorno di x_0 . In questa ipotesi

Proposizione 1. *f e g sono infinitesimi dello stesso ordine per x che tende a x_0 se e solo se la funzione $\frac{f}{g}$, che è definita in un intorno di x_0 , è convergente per x che tende a x_0 ed il limite è un numero reale diverso da 0*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0 \quad (4)$$

Questa proposizione è assai utile perchè suggerisce un procedimento semplice per stabilire se due infinitesimi sono dello stesso ordine. La dimostrazione di questa proposizione è elementare. Supponiamo che valga la (1) e supponiamo che in un intorno di x_0 sia $f \neq 0$ e $g \neq 0$ allora esiste un intorno W di x_0 tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = K + h(x) \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{x_0\}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0$$

Viceversa, supponiamo che f e g siano diverse da 0 in un intorno U di x_0 e che valga la (4). Per $x \in U \cap A$ possiamo scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = K + \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} - K \right\} = K + h(x)$$

e quindi

$$f(x) = g(x)\{K + h(x)\}$$

Per l'ipotesi (4), la funzione $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - K$ è infinitesima per x che tende a x_0 .

Considerazioni della stessa natura si possono fare in relazione alla Definizione 2. Supponiamo che f e g siano diverse da zero in un intorno U di x_0 e quindi le funzioni $\frac{f}{g}$ e $\frac{g}{f}$ sono definite per $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$. In tali ipotesi vale la seguente proposizione

Proposizione 2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè f sia infinitesima di ordine superiore a g è che valga*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = +\infty \quad (5)$$

Infatti se f e g sono diverse da zero in un intorno di x_0 e se (2) è vera, allora esiste un intorno W di x_0 tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x), \quad \forall x \in W \cap A$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0.$$

Viceversa supponiamo che f e g siano diverse da zero in un intorno U di x_0 e che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Per $x \in U \cap A$ possiamo scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = g(x) \cdot h(x)$$

e la funzione $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è infinitesima per x che tende a x_0 .

ESEMPIO 1

Consideriamo le funzioni $f : x \rightarrow \sin x$ e $g : x \rightarrow x$, $x \in \mathbb{R}$ ed entrambe infinitesime per x che tende a 0. f e g sono infinitesime dello stesso ordine, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ESEMPIO 2

Siano $A = [-1, 1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$. f e g sono infinitesime per $x \rightarrow 0$ e f è infinitesimo di ordine superiore a g ; infatti $\forall x \in [-1, 1]$ si può scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot x.$$

Altra verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

ESEMPIO 3

Siano $A = (0, 1]$, $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$. f e g sono infinitesime per x che tende a zero ma f e g sono infinitesimi non confrontabili tra loro.

Siano f e g due funzioni reali definite in $A \subset \mathbb{R}$, entrambe infinitesime per x che tende a x_0 , e sia α un numero reale positivo. Supponiamo che in un intorno di x_0 sia definita la funzione $x \rightarrow [g(x)]^\alpha$.

Definizione 3. Si dice che f è un infinitesimo per x che tende a x_0 di ordine α rispetto a g se f e g^α sono infinitesimi dello stesso ordine.

Se ciò avviene devono esistere una costante $K \neq 0$, un intorno U di x_0 ed una funzione h definita in $U \cap A \setminus \{x_0\}$ infinitesima per x che tende a x_0 tali che

$$f(x) = g^\alpha(x)[K + h(x)] \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \quad (6)$$

o anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = K. \quad (7)$$

In tal caso diremo che $K g^\alpha(x)$ è la parte principale dell'infinitesimo f rispetto all'infinitesimo g . Se esistono due numeri K e α che rendono vera la (6) (o la (7)) essi sono univocamente determinati.

ESEMPIO 4

Siano $A = [0, 1]$, $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = x$.

f e g sono infinitesime per x che tende a zero

f è di ordine 2 rispetto a g e la parte principale di f rispetto a g è $\frac{1}{2}x^2$. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Il seguente teorema è molto utile nello studio del limite del rapporto $\frac{f}{g}$ nel caso di indeterminazione $\frac{0}{0}$.

Teorema 1. Principio di sostituzione degli infinitesimi

Siano f, g, F, G quattro funzioni definite in $A \subset \mathbb{R}$ e infinitesime per x che tende a x_0 . Supponiamo che f, g, F, G siano diverse da zero in un intorno di x_0 e inoltre

1. F è infinitesimo di ordine superiore ad f ,
2. G è infinitesimo di ordine superiore a g .

In tali ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad L \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (8)$$

Dimostrazione.

Esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad f(x) + F(x) \neq 0, \quad g(x) + G(x) \neq 0, \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Per ogni $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ risulta

$$\frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 + \frac{F(x)}{f(x)}}{1 + \frac{G(x)}{g(x)}}. \quad (9)$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{G(x)}{g(x)} = 0$, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 + \frac{F(x)}{f(x)}}{1 + \frac{G(x)}{g(x)}} = 1. \quad (10)$$

Da (9) e (10) segue la tesi.

ESEMPIO 5

Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{2x + \sqrt{x}}$$

Poiché

1. x^2 è un infinitesimo (per $x \rightarrow 0$) di ordine superiore a \sqrt{x} .
2. $2x$ è un infinitesimo (per $x \rightarrow 0$) di ordine superiore a \sqrt{x} ,

risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

ESEMPIO 6

Siano $f(x) = \sqrt{|x + x^2|}$ e $g(x) = 2\sqrt{|x|} + x^2$; f e g definite \mathbb{R} . Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x + x^2|}}{2\sqrt{|x|} + x^2}.$$

Consideriamo l'infinitesimo (per $x \rightarrow 0$)

$$h(x) = |x|$$

f è di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto ad h in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{h(x)}} = 1 \neq 0$$

g è di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto ad h in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}} = 2 \neq 0$$

Ne segue che in $x = 0$ sarà

$$f(x) = \sqrt{|x|} + F(x), \quad g(x) = 2\sqrt{|x|} + G(x)$$

con F e G infinitesimi di ordine superiore a f e g rispettivamente. Conclusione:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{2\sqrt{|x|}} = \frac{1}{2}.$$

2. Il simbolo di Landau

Siano $f, g : A \rightarrow R$, A intervallo di R e x_0 punto di accumulazione per A . Supponiamo inoltre che f, g siano infinitesime per x che tende a x_0 .

Se f è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a g (per x che tende a x_0) ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

scriveremo $f(x) = o(g(x))$ (che si legge f è o-piccolo di g per x che tende a x_0). Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$$

ESEMPIO 1

$$\sin x - x = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Possimo scrivere quindi

$$\sin x = x + o(x). \tag{11}$$

In maniera analoga si deducono le seguenti eguaglianze (per x **che tende a zero**).

$$a^x = 1 + \log a \, x + o(x) \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\log(1+x) = x + o(x) \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan x = x + o(x) \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Analogamente

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

perchè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Infatti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \alpha \log(1+x) + o(\alpha \log(1+x)) - 1}{x} = \\ &\text{(per il Principio di sostituzione degli infinitesimi)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \log(1+x)}{x} = \alpha \end{aligned}$$

Nel limite sopra abbiamo posto $y = \alpha \log(1+x)$ ed utilizzato lo sviluppo $e^y = 1 + y + o(y)$ (vedi gli sviluppi (12)), tenuto conto che per $x \rightarrow 0$ si ha che $y \rightarrow 0$.

Si osservi che con la scrittura $f(x) = o(g(x))$ non si indica una eguaglianza tra funzioni ma l'appartenenza di f ad un insieme di funzioni. Sarebbe quindi più corretto scrivere $f \in o(g)$.

Ad esempio, scriveremo $x^3 = o(x)$, $x^4 = o(x)$ (per $x \rightarrow 0$) perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x} = 0$, naturalmente, per quanto osservato sopra, non potremo applicare in questo caso la proprietà transitiva dell'uguaglianza e dedurre che le funzioni x^3 e x^4 sono uguali. Nel calcolo dei limiti è utile disporre di alcune regole di calcolo con gli o-piccoli. Riportiamo qui sotto le principali nel caso degli $o(x^m)$ per $x \rightarrow 0$. In maniera analoga si procederà negli altri casi.

$$k o(x^n) = o(x^n) \quad (13)$$

$$o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^n), \quad n \leq m \quad (14)$$

$$o(x^n) o(x^m) = o(x^{m+n}) \quad (15)$$

$$[o(x^n)]^m = o(x^{mn}) \quad (16)$$

$$x^m o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad (17)$$

$$o(x^n + o(x^n)) = o(x^n) \quad (18)$$

Dimostriamo (13)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k o(x^n)}{x^n} = k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

Dimostriamo (14)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) \pm o(x^m)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} \pm \frac{o(x^m)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 \pm \frac{o(x^m)}{x^m} x^{m-n} = 0$$

Dimostriamo (15)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) o(x^m)}{x^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n) o(x^m)}{x^n x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} \frac{o(x^m)}{x^m} = 0$$

Dimostriamo (16)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[o(x^n)]^m}{x^{nm}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{o(x^n)}{x^n} \right]^m = 0$$

Dimostriamo (17)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m o(x^n)}{x^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

Dimostriamo (18)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n + o(x^n))}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n + o(x^n))}{x^n + o(x^n)} \frac{x^n + o(x^n)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 \cdot \left(1 + \frac{o(x^n)}{x^n} \right) = 0.$$

ESERCIZI SUI LIMITI 1

CALCOLARE IL VALORE DEI SEGUENTI LIMITI

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)^x$ (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x - 2}{x}\right)$ (8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x}\right)$ (9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- (10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}$ (11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) x$
- (12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^{a^x} - a}{a^x - 1}, (a \neq 1, a > 0)$
- (13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left[\frac{\log(x+1)}{\log x} \right]$ (14) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)}, (a > 0)$ (15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}$
- (16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$
- (17) $\lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{2^x - 1}{4^x - 2^x}\right)$ (18) $\lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{2^x - 1}{4^x - 3^x}\right)$
- (19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{x+1} + 1}{x^2}$ (20) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x^2 + x})}{x}$ (21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{x^4}$
- (22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x}$ (23) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\arctan x}$ (24) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{(\arccos x)^2}$
- (25) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\arctan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$ (26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$ (27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin^2 x)}{1 - \cos x}$
- (28) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x} - 1}{\log(1 + 2\sqrt{x^2 + x})}$ (29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos[\log(1 + x^2)] - 1}{x^4}$ (30) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
- (31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$ (32) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$ (33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^x - 1}{x^3}$

$$(34) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\log \left(\frac{x+1}{x} \right)}$$

$$(35) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{\log x}} - 1 \right) x$$

$$(36) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}}{\log(1 + \sqrt{x} + x)}$$

$$(37) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sin^2 x)}{\log(1 + x^2)}$$

$$(38) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(1 - \cos 2x)}{e^{3x^2} - 1}$$

$$(39) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{1 - \cos x})}{1 - e^{\sin 3x}}$$

$$(40) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x + x^3})}{\sqrt{x} [\log x - \log(\sin 2x)]}$$

$$(41) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x+x^2}} - 1}{\sqrt{x} [\log \tan 4x - \log x]}$$

$$(42) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + x^4})}{[2 \log x - \log(1 - \cos x)] x}$$

$$(43) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(x + x^2)}{[\log x - \log(e^{2x} - 1)] \sin x}$$

$$(44) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + 4x^2} - 1}{(e^{-x} + 1) \log(4 - 3 \cos x)}$$

$$(45) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{(\sqrt[3]{1 + 2x} - 1)(2 + \arctan x)}$$

$$(46) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x^2} - 1}{\log(1 + \sin^2 x)(2 + \arcsin x)}$$

Calcolare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il valore dei seguenti limiti di successioni:

$$(47) \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(\cos \frac{1}{n} \right) n^x \quad (48) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^x} - 2^{n^x}}{n^x} \quad (49) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$(50) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \sin \frac{1}{n^3} \quad (51) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-x} (2^{n^x} - 1) \quad (52) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x (\sqrt[n]{n} - 1)$$

RISULTATI

(1) e^3	(2) e^2	(3) $\frac{1}{e}$	(4) $+\infty$	(5) $+\infty$	(6) e^4
(7) $\log 6$	(8) $\frac{\log 2/3}{\log 3/4}$	(9) 1	(10) 0	(11) -1	(12) $a \log a$
(13) 0	(14) $a^a (1 - \log a)$	(15) -1	(16) e	(17) 0	(18) $\log \frac{\log 2}{\log 4/3}$
(19) $(\log 2)^2$	(20) $+\infty$	(21) 1	(22) 1	(23) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(24) $\frac{1}{2}$
(25) -1	(26) 1	(27) 2	(28) 0	(29) $-\frac{1}{2}$	(30) 0
(31) 1	(32) $-\frac{1}{2}$	(33) $-\frac{1}{2}$	(34) 1	(35) $+\infty$	(36) 1
(37) 0	(38) $\frac{2}{3}$	(39) $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	(40) $-\frac{1}{\log 2}$	(41) $\frac{1}{\log 4}$	(42) $\frac{1}{\log 2}$
(43) $-\frac{1}{\log 2}$	(44) 1	(45) $\frac{3}{4}$	(46) $\frac{1}{2}$		

(47) $-\frac{1}{2}$ per $x = 2$, $-\infty$ per $x > 2$ 0 per $x < 2$ (48) $+\infty$ per $x > 0$, 1 per $x = 0$, $\log \frac{3}{2}$ per $x < 0$
(49) 1 per $x = 1$, 0 per $x < 1$, $+\infty$ per $x > 1$ (50) 1 per $x = 3$, 0 per $x < 3$, $+\infty$ per $x > 3$;
(51) $\log 2$ per $x < 0$, $+\infty$ per $x > 0$, 1 per $x = 0$ (52) $+\infty$ per $x \geq 1$, 0 per $x < 1$.

Svolgimento Esercizio (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y = \frac{1}{x}$ osserviamo che per $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} e^{3 \frac{\log(1+y)}{y}} = e^3$$

perchè $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

Svolgimento Esercizio (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$$

Posto $y = \frac{1}{x}$ osserviamo che per $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log(1+2y)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{2y+o(y)}{y}} = e^2$$

Perchè $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{2y + o(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{2y}{y} = 2$.

Svolgimento Esercizio (3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y = \frac{1}{x}$ osserviamo che per $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log(1-y)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{-y+o(y)}{y}} = e^{-1}$$

Perchè $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-y + o(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-y}{y} = -1$.

Svolgimento Esercizio (4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x \log\left(3 + \frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y = \frac{1}{x}$ osserviamo che per $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{3 \log(3+y)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{3 \log\left[3\left(1 + \frac{y}{3}\right)\right]}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{3 \log 3 + 3 \log\left(1 + \frac{y}{3}\right)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log 27 + \frac{y+o(y)}{y}}{y}} = +\infty$$

Perchè $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{y + o(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{y}{y} = 1$, mentre $\lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log 27}{y}} = +\infty$.

Svolgimento Esercizio 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log\left(3 - \frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y = \frac{1}{x}$ osserviamo che per $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log(3-y)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log\left[3\left(1 - \frac{y}{3}\right)\right]}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log 3 + \log\left(1 - \frac{y}{3}\right)}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log 9}{y} + \frac{-y}{3} + o(y)} = +\infty$$

Perché $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-y}{3} + o(y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-y}{3y} = -\frac{1}{3}$, mentre $\lim_{y \rightarrow 0+} e^{\frac{\log 9}{y}} = +\infty$.

Svolgimento Esercizio 6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} \right]^{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \left(1 + \frac{3}{x}\right)^3}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \log\left(1 + \frac{3}{x}\right)}}{e^{x \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)}} = e^4$$

Perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^3 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 = 1$, mentre per il calcolo del limite relativo agli altri termini si procede come negli esercizi precedenti.

Svolgimento Esercizio 7

Utilizziamo nel limite lo sviluppo della funzione esponenziale (vedi gli sviluppi (12)) con $a = 2$ e $a = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + x \log 2 + o(x) + 1 + x \log 3 + o(x) - 2}{x} =$$

(Principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x(\log 2 + \log 3)}{x} = \log 6.$$

Svolgimento Esercizio 8 Utilizziamo nel limite lo sviluppo della funzione esponenziale (vedi gli sviluppi (12)) con $a = 2$, $a = 3$ e $a = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + x \log 2 - 1 - x \log 3 + o(x)}{1 + x \log 3 - 1 - x \log 4 + o(x)}$$

Abbiamo utilizzato il fatto che $o(x) - o(x) = o(x)$. Quindi per il Principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x(\log 2 - \log 3)}{x(\log 3 - \log 4)} = \frac{\log \frac{2}{3}}{\log \frac{3}{4}}.$$

Svolgimento Esercizio 9

Scriviamo il limite proposto nella forma $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \log x} = 1$, perché $\lim_{x \rightarrow 0+} x \log x = 0$.

Svolgimento Esercizio 10

Scriviamo il limite proposto nella forma $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{x^x \log x} = 0$, perché $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$, (vedi Esercizio 9) e $\lim_{x \rightarrow 0+} \log x = -\infty$, quindi il limite assume la forma $e^{-\infty}$ che dà 0.

Svolgimento Esercizio 11

I) metodo

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile: $y = \arctan x$. Quindi per $x \rightarrow +\infty$ si ha $y \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$, il limite proposto diventa

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) \tan y = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin y}{\cos y} = 1 \cdot \lim_{y \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{y - \frac{\pi}{2}}{\cos y},$$

posto $z = y - \frac{\pi}{2}$ ed osservato che per $y \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$ si che $z \rightarrow 0^-$, otteniamo

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{z}{\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} = - \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

II) metodo

Scriviamo il limite nella forma seguente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

in modo da ottenere una forma indeterminata, del tipo $\frac{0}{0}$, possiamo applicare il *Teorema dell'Hospital*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)}{D\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Esercizio 12

Scriviamo il limite nella forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} a \frac{a^{a^x - 1} - 1}{a^x - 1} = a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = a \log a,$$

perchè abbiamo posto $y = a^x - 1$, e per $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, vedi i limiti notevoli (12)

Esercizio 13

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left\{ \frac{\log \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{\log x} \right\} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left[\frac{\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\log x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left[1 + \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\log x} \right] = \end{aligned}$$

Si pone $y = \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\log x}$ e si osserva che per $x \rightarrow +\infty$ si ha che $y \rightarrow 0$, si può quindi utilizzare lo sviluppo $\log(1+y) = y + o(y)$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x} + x o\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x}\right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\log x} + \left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\log x}\right) o\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x}\right) \left[\frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\log x}\right]^{-1} = 0
\end{aligned}$$

Perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} = 0$.

Esercizio 14

(I metodo) (Sviluppo di Taylor)

Osservato che per $x \rightarrow a$ si ha che $(x - a) \rightarrow 0$ possiamo utilizzare gli sviluppi (12) dell'esponenziale e del logaritmo:

$$\begin{aligned}
a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a - a^{x-a}}{x - a + o(x - a)} &= a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{a \log \frac{x}{a}} - 1 - (x - a) \log a + o(x - a)}{x - a + o(x - a)} = \\
&= a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 + a \log \frac{x}{a} + o(\log \frac{x}{a}) - 1 - (x - a) \log a + o(x - a)}{x - a + o(x - a)} = \\
&= a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \log\left(\frac{x-a}{a} + 1\right) + o(\log\left[\frac{x-a}{a} + 1\right]) - (x - a) \log a + o(x - a)}{x - a + o(x - a)} = \\
&= a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \frac{x-a}{a} + a o(x - a) + o\left(\frac{x-a}{a} + o(x - a)\right) - (x - a) \log a + o(x - a)}{x - a + o(x - a)} =
\end{aligned}$$

Tenuto conto delle proprietà (14) e (18) degli o-piccoli ed utilizzando il Principio di sostituzione degli infinitesimi, si ha infine

$$= a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a - (x - a) \log a + o(x - a)}{x - a + o(x - a)} = a^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(1 - \log a)}{x - a} = a^a (1 - \log a)$$

(II metodo) (Teorema dell'Hospital, notare in questo caso la differenza!!)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{D(x^a - a^x)}{D \sin(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^{a-1} - a^x \log a}{\cos(x - a)} = a^a (1 - \log a).$$

Esercizio 15

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1.$$

Perché per $x \rightarrow \infty$ $\frac{1}{x} \rightarrow 0+$, si applica quindi lo sviluppo del *logaritmo* (vedi (12)).

Esercizio 16 Scriviamo l'espressione nella forma

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{\sin x}{x - \sin x}} \log \frac{x}{\sin x}$$

e consideriamo l'argomento dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x - \sin x} \log \left(\frac{x}{\sin x} - 1 + 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x - \sin x} \left[\frac{x}{\sin x} - 1 + o \left(\frac{x - \sin x}{\sin x} \right) \right] = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o \left(\frac{x - \sin x}{\sin x} \right)}{\frac{x - \sin x}{\sin x}} = 1 \end{aligned}$$

Il valore del limite assegnato è quindi e .

Esercizio 17

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left(\frac{1 + x \log 2 + o(x) - 1}{1 + x \log 4 + o(x) - 1 - x \log 2 + o(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left(\frac{x \log 2 + o(x)}{x(\log 4 - \log 2) + o(x)} \right) = 0$$

Perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log 2 + o(x)}{x(\log 4 - \log 2) + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log 2}{x \log 2} = 1$$

Esercizio 18

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left(\frac{1 + x \log 2 + o(x) - 1}{1 + x \log 4 + o(x) - 1 - x \log 3 + o(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left(\frac{x \log 2 + o(x)}{x(\log 4 - \log 3) + o(x)} \right) = \\ &= \log \left(\frac{\log 2}{\log 4/3} \right) \end{aligned}$$

Perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log 2 + o(x)}{x(\log 4 - \log 3) + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log 2}{x \log 4/3} = \frac{\log 2}{\log 4/3}.$$

Esercizio 19

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} \right)^2 = (\log 2)^2$$

Esercizio 20

Applicando il *teorema dell'Hospital* si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}}{1} = +\infty$$

Perché assume la forma $\frac{1}{0^+}$

Utilizzando invece lo sviluppo della funzione *logaritmo*, cioè $\log(1 + y) = y + o(y)$, con $y = \sqrt{x^2 + x}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} + o(\sqrt{x^2 + x})}{x} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Esercizio 21

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x x^4} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 = 1$$

Esercizio 22

Poniamo $y = \arctan \frac{1}{x}$, quindi $x = \frac{1}{\tan y}$, in particolare per $x \rightarrow +\infty$ si ha che $y \rightarrow 0+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Esercizio 23

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$. Infatti basta porre $y = \arctan x$, da cui $x = \tan y$, di conseguenza per $x \rightarrow 0$ si ha che $y \rightarrow 0$. Il limite diventa $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$. Ragionando quindi come abbiamo fatto per ottenere gli sviluppi (12) si ha $\arctan x = x + o(x)$. Quindi il limite proposto si può risolvere nel modo che segue.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{(\arctan x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - [1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)]}{[x + o(x)]^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 24

Poniamo $y = \arccos x$, da cui $x = \cos y$. Per $x \rightarrow 1$ si ha che $y \rightarrow 0$. Il limite proposto si scrive nella forma

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 25

Poniamo $y = x - \frac{\pi}{2}$. Di conseguenza per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $y \rightarrow 0$. Il limite si scrive nella forma

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan y}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan y}{-\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + o(y)}{-y - o(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-y} = -1.$$

Perché (vedi Esercizio 22) $\arctan y = y + o(y)$.

Esercizio 26

Vedi la risoluzione dell'Esercizio 22

Esercizio 27

Osserviamo che posto $y = \sin x$ dalla scomposizione $\log(1+y) = y + o(y)$ (vedi (12)) otteniamo $\log(1 + \sin^2 x) = \sin^2 x + o(\sin^2 x)$. Inoltre tenuto conto che $\sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + 2xo(x) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$, possiamo scrivere $\log(1 + \sin^2 x) = x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2))$ da questa per (18) otteniamo $\log(1 + \sin^2 x) = x^2 + o(x^2)$. Di conseguenza il limite proposto diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Esercizio 28

Scriviamo lo sviluppo delle funzioni che compaiono nell'espressione (vedi (12) ed esercizi precedenti):

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + o(\sin x) = 1 + x + o(x) + o(x + o(x)) = 1 + x + o(x).$$

$$\log(1 + 2\sqrt{x^2 + x}) = 2\sqrt{x^2 + x} + o(\sqrt{x^2 + x}) = 2\sqrt{x}\sqrt{x+1} + o(\sqrt{x}\sqrt{1+x}) = 2\sqrt{x}\sqrt{1+x} + o(\sqrt{x}).$$

Sostituendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x) - 1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x} + o(\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = 0.$$

Esercizio 29

Scriviamo lo sviluppo delle funzioni che compaiono nell'espressione (vedi (12) ed esercizi precedenti):

$$\log(1 + x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \cos(\log(1 + x^2)) &= \cos(x^2 + o(x^2)) = 1 - \frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2} + o((x^2 + o(x^2))^2) = \\ &= 1 - \frac{x^4 + o(x^4)}{2} + o(x^4 + o(x^4)) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

Perché $-\frac{o(x^4)}{2} + o(x^4 + o(x^4)) = o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$. Sostituiamo nel limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{2}}{x^4} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 30

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \log x} = 0$$

Perché il limite assume la forma $e^{-\infty}$ in quanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \log x = -\infty$, si tratta di una forma $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Esercizio 31

Osserviamo che

$$\begin{aligned} (1+x)^x &= e^{x \log(1+x)} = 1 + x \log(1+x) + o(x \log(1+x)) = 1 + x[x + o(x)] + o(x[x + o(x)]) = \\ &= 1 + x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2)) = 1 + x^2 + o(x^2) + o(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + x^2 + o(x^2) - \cancel{1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Esercizio 32

Osserviamo che

$$\log \cos x = \log \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 33

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} (\cos x)^x &= e^{x \log(\cos x)} = 1 + x \log(\cos x) + o(x \log(\cos x)) = 1 + x \log \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] + \\ &+ o \left(x \log \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] \right) = 1 + x \left[-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] + o \left(-x \left[\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] \right) = \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o(x^3 + o(x^3)) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o(x^3) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3), \end{aligned}$$

sostituiamo nel limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \cancel{1}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 47

Poiché per n che tende ad infinito $\frac{1}{n}$ tende a zero possiamo sviluppare \cos come segue

$$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Onde

$$\begin{aligned} \log \cos \left(\frac{1}{n} \right) &= \log \left[1 - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] = -\frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) + o \left[\frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] = \\ &= \frac{-1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Il limite proposto si può scrivere nella forma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] n^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n^{2-x}} + n^x o \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0 \quad \text{se } x < 2.$$

Se invece $x = 2$ il valore del limite è $-\frac{1}{2}$. Se $x > 2$ si invece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] n^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^x}} = \\ &\text{(principio di sostituzione degli infinitesimi)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^x}} = -\infty \end{aligned}$$

Esercizio 48

Sia $x > 0$. Osserviamo che per $n \rightarrow +\infty$ $n^x \rightarrow +\infty$. Possiamo porre $y = n^x$ ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^x} - 2^{n^x}}{n^x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3^y - 2^y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} 3^y \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3^y}{y} = +\infty$$

perchè $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^y = 0$.

Sia $x = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^0} - 2^{n^0}}{n^0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Sia $x < 0$. Osserviamo in questo caso che per $n \rightarrow +\infty$ si ha $n^x = \frac{1}{n^{|x|}} \rightarrow 0$. (Ricordare che se $x < 0$ allora $x = -|x|$) Possiamo porre $y = n^x$ ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n^x} - 2^{n^x}}{n^x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3^y - 2^y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + y \log 3 + o(y) - 1 - y \log 2 + o(y)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(\log 3 - \log 2) + o(y)}{y} = \end{aligned}$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(\log 3 - \log 2)}{y} = \log \frac{3}{2}.$$

Abbiamo utilizzato gli sviluppi (vedi (12))

$$3^y = 1 + y \log 3 + o(y), \quad 2^y = 1 + y \log 2 + o(y.)$$

Esercizio 49

Osserviamo che se $x \leq 0$ il limite è banalmente 0. Se $x > 0$ si presenta invece una forma indeterminata $+\infty \cdot 0$ che risolviamo utilizzando lo sviluppo di $\log y = y + o(y)$ e ponendo $y = \frac{1}{n}$. Tenuto conto che per $n \rightarrow +\infty$ si ha $y \rightarrow 0^+$, il principio di sostituzione degli infinitesimi ci consente di scrivere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y + o(y)}{y^x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{y^x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases} .$$

Esercizio 50

Osserviamo che se $x \leq 0$ il limite è banalmente 0. Se $x > 0$ si presenta invece una forma indeterminata $+\infty \cdot 0$ che risolviamo utilizzando lo sviluppo di $\sin y = y + o(y)$ e ponendo $y = \frac{1}{n}$. Tenuto conto che per $n \rightarrow +\infty$ si ha $y \rightarrow 0^+$, il principio di sostituzione degli infinitesimi ci consente di scrivere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \sin \frac{1}{n^3} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^3 + o(y^3)}{y^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y^3}{y^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y^{3-x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{se } x < 3 \end{cases} .$$

Esercizio 51

Sia $x > 0$. Osserviamo che per $n \rightarrow +\infty$ $n^x \rightarrow +\infty$. Possiamo porre $y = n^x$ ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-x} (2^{n^x} - 1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2^y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2^y}{y} - \frac{1}{y} = +\infty.$$

Sia $x = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-x} (2^{n^x} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^0 (2^{n^0} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Sia $x < 0$. Osserviamo in questo caso che per $n \rightarrow +\infty$ si ha $n^x = \frac{1}{n^{|x|}} \rightarrow 0$. (Ricordare che se $x < 0$ allora $x = -|x|$) Possiamo porre $y = n^x$ ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-x} (2^{n^x} - 1) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^y - 1}{y} = \log 2.$$

(Vedi (12))

Esercizio 52

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left(e^{\frac{\log n}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left[\frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \right]$$

Dove abbiamo utilizzato lo sviluppo $e^y = 1 + y + o(y)$, tenendo presente il fatto che, posto $y = \frac{\log n}{n}$, per $n \rightarrow +\infty$ si ha $y \rightarrow 0$.

Il principio di sostituzione degli infinitesimi ci consente di scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \left[\frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \frac{\log n}{n}$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{x-1} \log n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases} .$$