CAPITOLO PRIMO

CENNI DI LOGICA
E
TEORIA ELEMENTARE DEGLI INSIEMI

ESERCIZI

1.1

Dati gli insiemi $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, stabillire se sono vere le seguenti affermazioni:

(a)	$a \in A$	(b)	$a \subset A$	(c)	$\{a\} \in A$
(d)	$\{a\} \subset A$	(e)	$A \in B$	(f)	$A \subset B$
(g)	$B \not\subset A$	(h)	$A \in \{A, B\}$	(i)	$A \setminus B = \varnothing$
(l)	$A \setminus B = \{c\}$	(m)	$A \setminus B = c$	(n)	$A \cap B = A$
(o)	$A \cup B = B$	(p)	$A \cup B = \{a, b, c\}$	(q)	$(a, c) = A \times B$
(r)	$(a, c) \in B \times A$	(s)	$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$	(t)	$\forall x,\ x \in A \iff x \in B$

1.2

Dato un insieme A, si dice **potenza** o **insieme delle parti di** A e si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A (compresi $\varnothing$ ed A). Ad esempio:

$$\text{se} \quad A = \{a\} \qquad \text{allora} \quad \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$$

$$\text{se} \quad A = \{a, b\} \quad \text{allora} \quad \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

(a) Descrivere $\mathcal{P}(A)$ se $A = \{a, b, c\}$.

(b) Se $A = \{a, b\}$, dire qiuali delle seguenti scritture sono corrette:

$$(b_1) \quad a \in \mathcal{P}(A) \qquad (b_2) \quad \{a\} \in \mathcal{P}(A) \qquad (b_3) \quad \{a\} \subset \mathcal{P}(A)$$

$$(b_4) \quad A \in \mathcal{P}(A) \qquad (b_5) \quad A \subset \mathcal{P}(A) \qquad (b_6) \quad \varnothing \in \mathcal{P}(A)$$

(c) Provare per induzione che se A possiede n elementi, $\mathcal{P}(A)$ ne possiede 2^n.

1.3

Trovare $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ per i seguenti insiemi:

(a)	$A = \{x \in \mathbb{Z} :\ -3 < x < 3\}$,	$B = \{x \in N :\ x < 5\}$;
(b)	$A = \{x \in \mathbb{Z} :\ -5 \le x \le 5\}$,	$B = \{x \in \mathbb{Z} :\ 2 \le x \le 7\}$;
(c)	$A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 = -1\}$,	$B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 = 1\}$;
(d)	$A = \{x \in \mathbb{R} :\ x < 2 \wedge -2 < x\}$,	$B = \{x \in \mathbb{R} :\ x < -1 \vee x > 1\}$.

1.4

Trasformare le seguenti affermazioni in una corretta implicazione o viceversa, (Per svolgere alcuni esercizi non occorre conoscere il significato delle affermazioni).

(a) Condizione sufficiente perché un numero sia multiplo di quattro è che lo sia di venti.

(b) Condizione necessaria e sufficiente perché sia $\sqrt{x-1} = 1$ è $x = 2$.

(c) Condizione sufficiente (ma non necessaria) che sia $x^2 > 1$ è $x > 1$.

(d) Condizione necessaria e sufficiente che sia $x^3 > 1$ è $x > 1$.

(e) Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché una funzione sia derivabile è che sia continua.([1])

(f) f continua in $[a, b] \Longrightarrow f$ integrabile in $[a, b]$.([2])

(g) Lo studente studia $\Longrightarrow$ lo studente passa l'esame.

(h) $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$.

(i) $x = \sqrt{5} \Longrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 2$.

1.5

Date le seguenti coppie A, B di proposizioni, dire tra le implicazioni $A \Longrightarrow B$, $B \Longrightarrow A$, $A \iff B$ quali sono vere:

(a)	$A:\ x(x-1) = 0$	$B:\ x = 0$;
(b)	$A:\ \|x\| \leq 0$	$B:\ x = 0$;
(c)	$A:\ x \in P \cap Q$	$B:\ x \in P$;
(d)	$A:\ x + y \geq 0$	$B:\ x \geq 0 \wedge y \geq 0$;
(e)	$A:\ xy \geq 0$	$B:\ x$ e y hanno lo stesso segno;
(f)	$A:\ x \leq 0$	$B:\ \|x\| = -x$;
(g)	$A:\ x \notin \mathbb{Q}$	$B:\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
(h)	$A:\ \|x - 1\| \geq 2$	$B:\ x \geq 3$;
(i)	$A:\ x^2 = 4$	$B:\ x = 2$;
(l)	$A:\ x^2 = 4$	$B:\ x = 2 \vee x = -2$;
(m)	$A:\ x^2 = 4$	$B:\ \|x\| = 2$;
(n)	$A:\ \sqrt{x^2} = 2$	$B:\ x = 2$;
(o)	$A:\ \sqrt{x^2} = 2$	$B:\ x = 2 \vee x = -2$;
(p)	$A:\ \sqrt{x^2} = 2$	$B:\ \|x\| = 2$;
(q)	$A:\ \|x\| > 1$	$B:\ x > 1$;
(r)	$A:\ \|x\| < 1$	$B:\ x < 1 \wedge x > -1$;
(s)	$A:\ \|x\| < 1$	$B:\ x < 1$;
(t)	$A:\ \|x\| > 1$	$B:\ x < -1$.
(u)	$A:\ \|x\| > 1$	$B:\ x < 1 \vee x > -1$.

1.6

Diremo che i numeri a, b, $c \in \mathbb{N}$ formano una **terna pitagorica** *se avviene che $a^2 = b^2 + c^2$. Dato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, se poniamo $a = n^2 + 1$, $b = n^2 - 1$, $c = 2n$. allora i numeri a, b, c formano una terna pitagorica.*

Dire se le seguenti affermazioni sono corrette:

(a) L'enunciato è falso, perché $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$ è una terna pitagorica, ma non esiste alcun intero n tale che risulti $13 = n^2 + 1$.

[1] Per svolgere l'esercizio non è necessario conoscere il significato dell'affermazione.
[2] Come sopra.

(b) L'enunciato implica che se un triangolo è rettangolo, allora esiste un intero n tale che i cateti misurino $n^2 - 1$ e $2n$ e l'ipotenusa $n^2 + 1$.

(c) L'enunciato è vero, perché $(n^2 + 1) = (n^2 - 1)^2 + 4n^2$.

(d) L'enunciato è falso, perché se b e c sono interi, non è detto che lo sia $\sqrt{b^2 + c^2}$.

1.7

Per ciascuna delle seguenti proposizioni scrivere la negazione.

(a) Tutti gli studenti dl corso abitano a Pisa.

(b) Almeno uno studente del corso prenderà meno di 30 all'esame.

(c) Tutte le studentesse del corso hanno occhi celesti e capelli marroni.

(d) Tutti i docenti del Dipartimento svolgono almeno un corso oppure sono all'estero per motivi di studio.

(e) $\exists M \in \mathbb{R}: \ \forall x \in A \subset \mathbb{R}, \ x < M$.
(Spiegare il sigificato della proposizione, trovare un esempio di insieme A che verifica ed uno che non la verifica).

(f) $\forall x \in A \subset \mathbb{R} \ \exists M \in \mathbb{R}: \ x < M$.
(Come sopra).

(g) $\forall x', \, x'' \in A \subset \mathbb{R}$ con $x' \neq x''$ risulta $f(x') \neq f(x'')$.
(Qui f è una funzione definita su A. Spiegare il significato della proposizione e trovare due funzioni, una che la verifica e l'altra no).

(h) $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in A \ : f(x) = y$.
(Come sopra).

1.8

Date le proposizioni p ed s *vere* e le proposizioni q e r *false*, determinare quali delle seguenti espressioni logiche sono vere:

(a) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$.
(b) $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r \wedge \neg p)$.
(c) $[\neg s \wedge (q \vee s)] \vee (p \wedge \neg r)$.
(d) $(p \vee q) \Longrightarrow (r \vee \neg s)$.

1.9

Stabilire la tavola di verità delle seguenti espressioni logiche (cioé il loro valore vero o falso in funzione delle possibili alternative di verità per p, q ed r.

(a) $(p \vee \neg q) \Longrightarrow (r \wedge q)$.
(b) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.
(c) $(p \Longrightarrow \neg q) \vee (\neg p \Longrightarrow q)$.
(d) $(p \Longrightarrow q) \iff (\neg p \iff r)$.
(e) $(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$.
(f) $(p \iff \neg q) \iff (q \Longrightarrow \neg p)$.
(g) $[(p \Longrightarrow q) \wedge \neg q] \Longrightarrow \neg p$.

1.10

Semplificare le seguenti espressioni logiche, individuando le eventuali tautologie.

(a) $[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge p] \Longrightarrow q$;
(b) $[(p \Longrightarrow \neg q) \wedge q] \Longrightarrow \neg p$;
(c) $[(p \Longrightarrow \neg q) \wedge \neg p] \Longrightarrow q$;
(d) $[(\neg p \Longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow \neg q$;
(e) $[(\neg p \Longrightarrow q) \wedge \neg q] \Longrightarrow p$;
(f) $[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge q] \Longrightarrow p$;
(g) $[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge \neg p] \Longrightarrow \neg q$;
(h) $[(\neg p \Longrightarrow q) \wedge \neg p] \Longrightarrow q$.

1.11

Dati i seguenti enumciati definiti nell'insieme D indicato, determinare l'insieme di verità.

(a) $P(x)$: è un numero primo, $D = \{x \in \mathbb{N} : \ x \leq 10\}$;
(b) $P(x)$: è multiplo di 3, $D = \{x \in \mathbb{N} : \ 10 \leq x \leq 20\}$;
(c) $P(x, y) : x \, < \, y$ $D = \{(x \times y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ x \leq 20 \wedge y \leq 4\}$;
(d) $P(x, y) : y = x + 2$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \ -5 \leq x \leq 8 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 10\}$.

1.12

Dati gli enunciati $P(x) : x = 5n$, $Q(x) : x = 3n$ definiti in $D = \{x \in \mathbb{N} : \ 10 \leq x \leq 100\}$ e con $n \in \mathbb{N}$, stabilire l'insieme di verità di $P(x) \wedge Q(x)$ e quello di $P(x) \wedge \neg Q(x)$.

1.13

Dimostrare per induzione.

(a) $n! \, + \, 2^n \, \leq \, n^n,$ $\forall n \, \geq \, 3;$

(b) $2^n \, + \, 3^n \, \leq \, 4^n,$ $\forall n \, \geq \, 2;$

(c) $(1 - x^4)^n \, < \, (1 - x^5)^{10}$ $\forall n \geq 10, \ x \in (0, 1);$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^k \, \leq \, (1 + n^n)(1 + (n-1)^{n-1}) \cdots (1 + 3^3)(1 + 2^2)(1 + 1);$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \, \leq \, 2 \, - \, \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \, \leq \, \frac{3}{2} \, - \, \frac{1}{2n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$