Esercizi sulle equazioni differenziali

1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine.

$$(1) \quad u'(t) = 2t\,[t^2 + u(t)];$$

$$(2) \quad u(t)\sin 2t + u'(t) = \cos t - u'(t)\sin^2 t;$$

$$(3) \quad u(t) = \sqrt{1+t^2}\,u'(t) + 1;$$

$$(4) \quad u'(t) \; + \; \frac{2}{x}\;u(t) \; = \; e^{x^3}.$$

Risolvere i seguenti problemi:

$$(5) \quad \begin{cases} u'(t) - 2tu(t) = t; \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} u'(t) \; - \; e^t\,u(t) \; = \; e^t; \\ \\ u'(0) = 2 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) + |t|; \\ \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) + |t^2 - t|; \\ \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} u'(t) \; + \; P(t)\,u(t) \; = \; Q(t); \\ \\ u(0) = 3 \end{cases} \qquad \text{dove } P(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1 \\ t & t \geq 1 \end{cases}, Q(t) = 1.$$

Risolvere:

$$(10) \quad u(t) = \int_0^t u(s)\,ds \; + \; t + 1$$

$$(11) \quad u(t) \; = \; -\int_0^t \frac{2s}{1+s^2} u(s)\,ds \; + \; \sin t \; - \; 2$$

(12) Determinare u tale che:

$$\begin{cases} t^2 u'(t) - u(t) = -1 \\ \\ \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 2 \end{cases}$$

(13) Si consideri l'equazione differenziale:

$$u'(t) + u(t) = f(t)$$

(a) Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ per la quale esiste $M > 0$ tale che $\forall t \in R$ risulta $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \leq M$, Dimostrare che esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1(\mathbb{R})$ limitata su $\mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $\forall t \in \mathbb{R} : m \leq f(t) \leq M$ allora $\forall t \in \mathbb{R} : \ m \leq u(t) \leq M$.

(c) Dimostrare che se f è periodica di periodo T allora esiste una soluzione periodica u se e solo se esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $u(t_0) = u(t_0 + T)$.

(d) Dimostrare che se f è periodica e u è periodica di periodo T , allora f e u hanno la stessa media integrale su ogni intervallo di ampiezza T.

(14) Data l'equazione:

$$u'(t) - k\,u(t) \;=\; f(t),$$

con $f \in C^0([0, +\infty))$ e $\lim_{t\to+\infty} f(x) \;=\; 0$,
dimostrare che

(a) se $k > 0$ esiste una ed una sola soluzione tale che $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$;

(b) se $k < 0$ ogni soluzione u ha la proprietà: $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

(15) Si considerino i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \\ u(a) = \alpha \end{cases} , \quad \begin{cases} v'(t) + c(t)v(t) = f(t) \\ u(a) = \beta. \end{cases}$$

Dove $c,\ f \in C^0([a, b])$ Dimostrare che se $\alpha < \beta$ allora per ogni $t \in [a, b]$ si ha $u(t) < v(t)$.

Risultati.

(1) $u(t) = C\, e^{t^2} - (t^2+1), \;\; C \in \mathbb{R}.$

(2) $u(t) = \dfrac{C}{1+\sin^2 t} + \dfrac{\sin t}{1+\sin^2 t}, \;\; C \in \mathbb{R}.$

(3) $u(t) = \dfrac{C}{t+\sqrt{t^2+1}} + 1, \;\; C \in \mathbb{R}.$

(4) $u(t) = \dfrac{C}{t^2} + \dfrac{e^{t^3}}{3\,t^2}.$

(5) $u(t) = \dfrac{e^{t^2}-1}{2}.$

(6) $u(t) = e^{e^t-1} \,-\, 1 \,+\, e^{e^t-1}.$

(7) $u(t) = \begin{cases} e^t \left(1 + \displaystyle\int_0^t s\ e^{-s}\ ds\right) & t > 0, \\ e^t \left(1 - \displaystyle\int_0^t s\ e^{-s}\ ds\right) & t \le 0, \end{cases}$

(8) $u(t) = \begin{cases} e^t + t^2 + t + 1 & t \in [0,1], \\ e^t + 6e^{t-1} - (t^2+t+1) & t \ge 1, \\ 3e^t - (t^2+t+1) & t < 0 \end{cases}$

(9) $u(t) = \begin{cases} \dfrac{4-e}{\sqrt{e}}\ e^{-\frac{t^2}{2}} + 1 & t \ge 1, \\ 4\,e^{-t} + t - 1 & t \le 1, \end{cases}$

(10) $u(t) = 2\,e^t - 1$

(11) $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\left(-2 - \sin t + 2t\cos t + t^2 \sin t\right)$

(12) $u(t) = e^{-\frac{1}{t}} + 1$

(13 a) Consideriamo la formula risolutiva:

$$u(t) = e^{-t}\ e^{t_0}\, u(t_0) \,+\, e^{-t} \int_{t_0}^{t} f(s)\, e^s\ ds,$$

osserviamo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(s) e^s\ ds$ esiste perché per ipotesi f è limitata, ed inoltre, dato che vogliamo che u sia limitata deve risultare $\displaystyle\lim_{t_0 \to -\infty} e^{t_0} u(t_0) = 0$. In definitiva l'unica soluzione limitata è data da

$$u(t) \,=\, e^{-t} \int_{-\infty}^{t} f(s)\, e^s\ ds,$$

perché

$$|u| \le e^{-t} \int_{-\infty}^{t} |f|\, e^s \; ds \le M \, \frac{1}{e^t} \; \int_{-\infty}^{t} e^s \; ds \le M.$$

(13 b) Osserviamo che

$$m = m\, e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^s \; ds \le u = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, e^s \; ds \le \; M\, e^{-t} \; \int_{-\infty}^{t} e^s \; ds \; = \; M.$$

(13 c) L'equazione data vale per ogni $t \in \mathbb{R}$, in particolare quindi possiamo scrivere

$$u'(t+T) + u(t+T) = f(t+T) = f(t)$$

Poniamo $v(t) = u(t+T)$. Si ha che le funzioni u e v risolvono i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = f(t) \\ u(t_0) = u(t_0) \end{cases} , \quad \begin{cases} v'(t) + v(t) = f(t+T) \\ v(t_0) = u(t_0 + T) \end{cases}$$

Ma essendo $f(t) = f(t+T)$ e $u(t_0) = u(t_0 + T)$, abbiamo due problemi di Cauchy con gli stessi dati, quindi, per il teorema di unicità, per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta $v(t) = u(t)$, ovvero $u(t+T) = u(t)$.

(13 d) Per la periodicità di u è sufficiente considerare l'intervallo $[0, T]$ e integrare tra 0 e T l'equazione data

$$\int_0^T u'(t)dt + \int_0^T u(t)dt = \int_0^T f(t)dt \iff u(T) - u(0) + \int_0^T u(t)dt = \int_0^T f(t)dt \iff$$

$$0 + \int_0^T u(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

da cui dividendo per T otteniamo la tesi.

(14)(a) Consideriamo la formula risolutiva:

$$u(t) = \; C\, e^{kt} \; + e^{kt} \int_0^t f(s)\, e^{-ks} \; ds,$$

Osserviamo che dalla definizione di limite, applicata a $\lim_{s \to +\infty} f(s) = 0$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che per ogni $s > M$ risulta

$$\left| \int_0^{+\infty} f(s)\, e^{-ks} \; ds \right| \le \left| \int_0^{M} f(s)\, e^{-ks} \; ds \right| + \left| \int_M^{+\infty} f(s)\, e^{-ks} \; ds \right| \le M_1 + \varepsilon \left| \int_M^{+\infty} e^{-ks} \; ds \right| < +\infty.$$

Di conseguenza

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{kt} \left(C \, + \int_0^t f(s)\, e^{-ks} \; ds \right) = \begin{cases} 0, \text{ se } \quad C = -\displaystyle\int_0^{+\infty} f(s) e^{-ks} ds \\ \\ +\infty, \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{kt} \left(-\int_0^{+\infty} f(s) e^{-ks} ds \, + \int_0^t f(s)\, e^{-ks} \; ds \right) =$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{-\displaystyle\int_0^{+\infty} f(s) e^{-ks} ds \, + \int_0^t f(s)\, e^{-ks} \; ds}{e^{-kt}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t) e^{-kt}}{e^{-kt}} = 0$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il teorema dell'Hospital.

(14)(b) Consideriamo la formula risolutiva:

$$u(t) = \ C\ e^{kt} \ \ + e^{kt} \int_0^t f(s)\, e^{-ks}\ ds,$$

Se $k < 0$ si ha $\lim\limits_{t\to+\infty} C\, e^{kt} = 0$. Mentre

$$\lim_{t\to+\infty} \ e^{kt} \int_0^t |f(s)|e^{-ks} ds \ = 0,$$

se

$$\int_0^{+\infty} |f(s)|e^{-ks} ds \in \mathbb{R}.$$

Altrimenti se

$$\int_0^{+\infty} |f(s)|e^{-ks} ds = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t |f(s)|\, e^{-ks}\ ds}{e^{-kt}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|e^{-kt}}{e^{-kt}} = 0,$$

Infine

$$\left| e^{kt} \int_0^{+\infty} f(s)e^{-ks} ds \right| \le e^{kt} \int_0^t |f(s)|e^{-ks}\ ds.$$

(15) Ovviamente esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $t \in [a, \delta)$ risulta $u(t) < v(t)$. Se esistesse un t_0 tale che $u(t_0) = v(t_0) = u_0$ allora i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} , \quad \begin{cases} v'(t) + c(t)v(t) = f(t) \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$$

avrebbero gli stessi dati ma soluzioni diverse sull'intervallo $[a, t_0]$, in contraddizione con il teorema di unicità di soluzione.

2 Equazioni differenziali lineari di ordine n.

(1) $u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) = 0$

(2) $u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) = 0$

(3) $u^{III}(t) - 2u''(t) + 2u'(t) = 0$

(4) $u^{IV}(t) + 18u''(t) + 81\ u(t) = 0$

(5) $u^{III}(t) + 3u''(t) + 3u'(t) + u(t) = t$

(6) $u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = te^{3t};\ \ u(0) = \dfrac{1}{2};\ u'(0) = -\dfrac{3}{4}$

(7) $u^{III}(t) - u(t) = \sin 2t$

(8) $u''(t) + u(t) = \sin t$

(9) $u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = 2(\cos t - \sin t)\, e^{-t}$

(10) $u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) = 2(\cos t)\, e^{2t}\ +\ (4\cos 2t - 2\sin 2t)\, e^{3t}$

(11) $u''(t) - \log 4\ u'(t)\ +\ [(\log 2)^2\ +\ 1]u(t) = -2^{t+1}\ \sin t\ +\ 4^t[(\log 2)^2\ \sin t + (\log 4)\cos t]$

(12) $u''(t) - u(t) = \dfrac{1}{e^t + 1}$

(13) $u''(t) + 4u(t) = \sin^3 t;\ \ u(0) = 1;\ \ u'(0) = 1;$

(14) $t^3\, u^{III}(t) + 6t^2u''(t) + 8tu'(t) - 8u(t) = t^2$

(15) $t^2\, u''(t) - 2u(t) = 0$

(16) $t^2\, u''(t) + tu'(t) + u(t) = 0$

(17) $t^2\, u''(t) + 4tu'(t) + 2u(t) = t$

(18) $t^3\, u^{III}(t) + 3t^2u''(t) + 6tu'(t) - 6u(t) = 0$

(19) $t\, u^{III}(t) + 2u''(t) = 0$

(20) $u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = t\, e^t$

(21) $(t^2 - 1)u''(t) + tu'(t) - u(t) = 0$

(22) $t^2u''(t) + t^2u'(t) + (t-2)u(t) = 0$

(23) $tu''(t) + (t+3)u'(t) + 3u(t) = 4t^4e^t$

(24) $(t^2 + 1)u''(t) - 2tu'(t) + 2u(t) = 6(1 + t^2)^2$

(25) $(\sin t)^2\, u''(t) - \sin t\, \cos t\, u'(t) + u(t) = -\sin^3 t$

Risultati

(1) $u(t) = C_1 e^{-2t}\cos t \, + \, C_2 e^{-2t}\sin t.$

(2) $u(t) = C_1 e^{2t}\cos t \, + \, C_2 e^{2t}\sin t.$

(3) $u(t) = C_1 e^{t}\cos t \, + \, C_2 e^{t}\sin t \, + \, C_3.$

(4) $u(t) = C_1 \cos 3t \, + \, C_2 \sin 3t \, + \, C_3 t \, \cos 3t \, + \, C_4 t \, \sin 3t.$

(5) $u(t) = C_1 e^{-t} \, + \, C_2 t \, e^{-t} \, + \, C_3 t^2 \, e^{-t} \, + \, t \, - \, 3.$

(6) $u(t) = -2e^{t} \, + \, 2e^{2t} \, + \, \left(\frac{1}{2}\, t \, - \, \frac{3}{4}\right) \, e^{3t}.$

(7) $u(t) = C_1 e^{t} \, + \, C_2 \, \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t \, + \, C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\, t \, + \, \frac{8}{65} \, \cos 2t \, - \, \frac{1}{65} \, \sin 2t.$

(8) $u(t) = C_1 \, \cos \, t \, + \, C_2 \, \sin t \, - \, \frac{1}{2}\, t \, \cos t.$

(9) $u(t) = C_1 e^{(-1+i)t} \, + \, C_2 e^{(-1-i)t} \, + \, t \, e^{-t}(\cos \, t \, + \, \sin t).$

(10) $u(t) = C_1 e^{(2+i)t} \, + \, C_2 e^{(2-i)t} \, + \, t \, e^{2t} \, \sin t \, + \, e^{3t} \, \sin 2t.$

(11) $u(t) = C_1 \, 2^t \, e^{it} \, + \, C_2 \, 2^t \, e^{-it} \, + \, t \, 2^t \cos \, t \, + \, 4^t \, \sin t.$

(12) $u(t) = C_1 e^{t} \, + \, C_2 e^{-t} \, + \, \frac{e^t}{2} \left[-t + \log(1+e^t) \, - \, \frac{1}{e^t}\right] + \frac{e^{-t}}{2} \log(1+e^t).$

(13) $u(t) = -\frac{1}{10} \sin^5 t + \frac{1}{10} \cos t \, \sin^4 t + \frac{3}{20} \cos t \, \sin^2 t \, + \, \frac{1}{10} \cos^3 t \, + \, \frac{9}{10} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t.$

(14) $u(t) = C_1 t + C_2 \frac{1}{t^2} \sin(2 \log t) + C_3 \frac{1}{t^2} \cos(2 \log t) - \frac{1}{20} t^2.$

(15) $u(t) = C_1 \frac{1}{t} + C_2 t^2.$

(16) $u(t) = C_1 \cos(\log t) + C_2 \sin(\log t).$

(17) $u(t) = C_1 \frac{1}{t^2} + C_2 \frac{1}{t} + \frac{1}{6} t$

(18) $u(t) = C_1 \frac{1}{t} + C_2 \frac{1}{t^2} + C_3 t^3.$

(19) $u(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \log t.$

(20) $u(t) = C_1 e^{t} \, + \, C_2 e^{2t} \, + \, t \left(-1 - \frac{1}{2}\, t\right) \, e^{t}.$

(21) $u(t) = C_1 t + C_2 \sqrt{t^2 - 1}.$

(22) $u(t) = C_1 \, \frac{e^{-t}}{t} \, (t^2 + 2t + 2) + C_2 \, \frac{1}{t}.$

(23) $u(t) = (t^4 + C_2) \, e^t + C_1 (t^3 + 3t^2 + 6t + 6).$

(24) $u(t) = C_1 (t^2 - 1) + C_2 \, t + 3t^2 + t^4.$

(25) $u(t) = \sin t \quad \log \left[C_1 \, \sin t \, \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\tan t} \right)^{C_2} \right].$