ANALISI MATEMATICA II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 1/9/2009
TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan 9x^2 \ - \ [\log(1+3x^2)]^2 \ + \ 9\,(x^4 \ - \ x^2)}{\sin\, 4x^2 \ - \ 4\,\sin x^2}$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) \ = \ 2\ \sqrt{u(t)}\ \arctan(1+\sqrt{t}) \\ \\ u(0) \ = \ u_0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Si consideri

$$F(x) \ = \begin{cases} x^2 \ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \ e^{-t^2}\ dt, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che F è una funzione dispari su $\mathbb{R}$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -F(-x)$.

(b) Dimostrare che F è continua su $\mathbb{R}$.

(c) Dimostrare che F è derivabile su $\mathbb{R}$.

(d) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geq 0$.

(e) Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha $F(x) < x$.

(f) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

(g) Tracciare un grafico approssimato di F in un intorno di $x = 0$.

ESERCIZIO 4. (Punti 8) (Utilizzare i risultati enunciati nell'Esercizio 3, anche se non svolti).

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_0 \ = \ 1 \\ \\ a_{n+1} \ = \ a_n^2 \ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a_n}} \ e^{-x^2}\ dx \end{cases}$$

(a) Dimostrare che la successione è decrescente ed infinitesima.

(b) Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ a_n$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan 9x^2 \ - \ [\log(1+3x^2)]^2 \ + \ 9(x^4 \ - \ x^2)}{\sin\, 4x^2 \ - \ 4\, \sin x^2}$$

Svolgimento. Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite.

$$\tan t \ = \ t \ + \ \frac{1}{3}\, t^3 \ + \ o(t^3),$$

posto $t = 9x^2$, si ha

$$\tan 9x^2 \ = \ 9x^2 \ + \ 243\, x^6 \ + \ o(x^6). \tag{1}$$

Nell'espressione

$$\log(1+t) \ = \ t \ - \ \frac{1}{2}\, t^2 \ + \ o(t^2)$$

si pone $t = 3x^2$ ottenendo

$$\log(1+3x^2) = 3x^2 \ - \ \frac{1}{2}\, 9x^4 \ + \ o(x^4),$$

da cui

$$[\log(1+3x^2)]^2 = \left[3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)\right]^2 = 9x^4 + \frac{81}{4}x^8 + o(x^8) - 27x^6 + 6x^2 o(x^4) + 9x^4 o(x^4).$$

Essendo
$6x^2 o(x^4) = o(x^6)$, $o(x^8) = o(x^6)$, $\frac{81}{4}x^8 = o(x^6)$, $9x^4 o(x^4) = o(x^6)$ e $o(x^6) + o(x^6) = o(x^6)$, si ha

$$[\log(1+3x^2)]^2 = 9x^4 - 27x^6 + o(x^6). \tag{2}$$

Tenuto conto di (1) e (2), al numeratore si ha

$$\begin{aligned} &\tan 9x^2 \ - \ [\log(1+3x^2)]^2 \ + \ 9(x^4 \ - \ x^2) \ = \\ &= \ 9x^2 \ + \ 243\, x^6 \ + \ o(x^6) - 9x^4 + 27x^6 - o(x^6) + 9x^4 - 9x^2 = 270x^6 + o(x^6). \end{aligned} \tag{3}$$

Al denominatore si considera:

$$\sin t \ = \ t \ - \ \frac{1}{6}\, t^3 \ + \ o(t^3)$$

e si pone $t = 4x^2$ e $t = x^2$ ottenendo rispettivamente

$$\sin 4x^2 = 4x^2 - \frac{1}{6}\, 64\, x^6 \ + \ o(x^6), \quad \sin x^2 = x^2 - \frac{1}{6}\ x^6 \ + \ o(x^6),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sin\, 4x^2 \ - \ 4\, \sin x^2 \ = \ 4x^2 - \frac{32}{3}\, 64\, x^6 \ + \ o(x^6) \ - \ 4\ \left[x^2 - \frac{1}{6}\ x^6 \ + \ o(x^6)\right] = \\ = -10\, x^6 \ + \ o(x^6). \end{aligned} \tag{4}$$

Tenuto conto di (3), di (4) e del principio di sostituzione degli infinitesimi si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan 9x^2 \ - \ [\log(1+3x^2)]^2 \ + \ 9(x^4 \ - \ x^2)}{\sin\, 4x^2 \ - \ 4\, \sin x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{270x^6 + o(x^6)}{-10\, x^6 \ + \ o(x^6)} = \lim_{x\to 0+} \frac{270x^6}{-10\, x^6} = -27.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) \;=\; 2\ \sqrt{u(t)}\ \arctan(1+\sqrt{t}) \\ \\ u(0) \;=\; u_0. \end{cases} \tag{5}$$

Svolgimento.

Osserviamo che posto $B(u) = 2\sqrt{u}$, si ha che $B(u) = 0$ per $u = 0$. Quindi se $u_0 = 0$ una soluzione è, per ogni $t \geq 0$, $u(t) = 0$.
Se $u_0 < 0$ il problema non ha significato perché u compare sotto la radice quadrata. Consideriamo allora solo dati iniziali $u_0 > 0$. In questo caso dall'equazione si deduce che $u'(0) > 0$, u risulta crescente in un intervallo del tipo $(0,\,\delta)$ quindi la radice quadrata in questo intervallo è ben definita. Dall'equazione, per ogni $t \in (0,\delta)$, $u'(t) > 0$. Iterando questo procedimento si ha che la soluzione del problema è ben definita in $[0,+\infty)$.
Possiamo procedere quindi dividendo primo e secondo membro per $B(u(t))$ ed integrando:

$$\int_0^t \frac{u'(\tau)}{2\,\sqrt{u(\tau)}}\,d\tau \;=\; \int_0^t \arctan(1+\sqrt{\tau})\ d\tau \tag{6}$$

Al primo membro, effettuando il cambiamento di variabile $\sigma = u(\tau)$, otteniamo

$$\int_0^t \frac{u'(\tau)}{2\,\sqrt{u(\tau)}}\,d\tau \;=\; \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{2\,\sqrt{\sigma}}\,d\sigma \;=\; \big[\sqrt{\sigma}\big]_{u_0}^{u(t)} = \sqrt{u(t)} \;-\; \sqrt{u_0}. \tag{7}$$

Al secondo membro di (6) si pone invece $s = \sqrt{\tau}$ e poi si integra per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^t \arctan(1+\sqrt{\tau})\ d\tau \;&=\; \int_0^{\sqrt{t}} \arctan(1+s)\ \ 2\,s\ ds \;= \\ &= \big[s^2\ \arctan(1+s)\big]_0^{\sqrt{t}} \;-\; \int_0^{\sqrt{t}} \frac{s^2}{1+(1+s)^2}\,ds \;= \\ = t\ \arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \int_0^{\sqrt{t}} &\frac{s^2+2s+s^2}{2+2s+s^2}\,dt \;+\; \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2+2s}{2+2s+s^2}\,ds \;= \\ &= t\ \arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \int_0^{\sqrt{t}} 1\,dt \;+\; \big[\log(2+2s+s^2)\big]_0^{\sqrt{t}} \;= \\ &= t\ \arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \sqrt{t} \;+\; \log(2+2\sqrt{t}+t) - \log 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Da (7) e (8) segue:

$$\sqrt{u(t)} \;=\; \sqrt{u_0} \;+\; t\ \arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \sqrt{t} \;+\; \log(2+2\sqrt{t}+t) - \log 2,$$

ovvero

$$u(t) \;=\; \Big(\sqrt{u_0} \;+\; t\ \arctan(1+\sqrt{t}) \;-\; \sqrt{t} \;+\; \log(2+2\sqrt{t}+t) - \log 2\Big)^2.$$

ESERCIZIO 3. (Punti 9)

Si consideri

$$F(x) \;=\; \begin{cases} x^2 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Dimostrare che F è una funzione dispari su $\mathbb{R}$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -F(-x)$.

(b) Dimostrare che F è continua su $\mathbb{R}$.

(c) Dimostrare che F è derivabile su $\mathbb{R}$.

(d) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geq 0$.

(e) Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha $F(x) < x$.

(f) Calcolare $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

(g) Tracciare un grafico approssimato di F in un intorno di $x = 0$.

Svolgimento.

(a)

$$F(-x) = (-x)^2 \int_0^{-\frac{1}{x}} e^{-t^2}\, dt = x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \left(-\, e^{-(-s)^2}\right) ds = -\, x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-s^2}\, ds = -F(x).$$

Nell'integrale sopra abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $t = -s$.

(b) La funzione F risulta continua per ogni $x \neq 0$ perché è il prodotto della funzione continua $g(x) = x^2$ e di $h(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\, dt$. Quest'ultima è la composizione della funzione integrale $G(x) = \int_0^{x} e^{-s^2}\, ds$ e di $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, continua per ogni $x \neq 0$. G risulta continua perché la funzione integranda è continua. In definitiva $h(x) = G(\varphi(x))$ è continua per ogni $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue.

Resta da verificare la continuità in $x = 0$. A tale scopo calcoliamo $\lim_{x \to 0+} F(x)$ e $\lim_{x \to 0-} F(x)$, provando che sono entrambi uguali a zero, ovvero a $F(0)$.

Cambiando variabile nel limite si ha

$$\lim_{x \to 0+} F(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^2} \int_0^{y} e^{-t^2}\, dt =$$

Il valore di $\lim_{y \to +\infty} \int_0^{y} e^{-t^2}\, dt$ coincide con il valore dell'integrale in senso generalizzato $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ che è un valore finito C se la funzione integranda è integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $(0, +\infty)$.
Questo è banalmente verificato perché la funzione $t \longrightarrow e^{-t^2}$ risulta continua sulla semiretta $[0, \infty)$, inoltre per ogni $t > 0$ vale

$$0 < e^{-t^2} < \frac{1}{t^2}$$

Per il teorema del confronto si ha l'integrabilità perché la funzione $t \longrightarrow \frac{1}{t^2}$ è integrabile in s. g. su $[1, +\infty)$.
(Su $[0, 1]$ $t \longrightarrow e^{-t^2}$ è integrabile secondo Riemann.)
Tornando al limite di partenza si ha

$$\lim_{x \to 0+} F(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = C \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^2} = 0.$$

Con cosiderazioni analoghe si dimostra che $\lim_{x \to 0-} F(x) = 0$.

(c) Si dimostra che F è derivabile per ogni $x \neq 0$ con considerazioni identiche a quelle fatte nel punto (b), tenendo presente che per il teorema fondamentale del calcolo integrale G è derivabile.
Per quanto riguarda la derivabilità nel punto $x = 0$ si procede calcolando il limite del rapporto incrementale di F ed effettuando un cambiamento di variabile come nel calcolo del limite del punto (b) :

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\, dt = 0$$

Possiamo allora scrivere

$$F'(x) = \begin{cases} 2\,x \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;-\; x^2\, e^{-\frac{1}{x^2}}\, \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ovvero

$$F'(x) = \begin{cases} 2\,x \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;-\; e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che F' è continua in $x = 0$ e $F'(0) = 0$. Infatti basta ragionare come nel calcolo del limite effettuato nel punto (b).

(d) Iniziamo col dimostrare che se $x > 0$ allora

$$2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;>\; e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{9}$$

Osserviamo che la funzione $t \to e^{-t^2}$ è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$ e quindi per ogni $t \in \left(0, \dfrac{1}{x}\right)$ il suo valore risulta maggiore di quello assunto sul secondo estremo, ovvero per ogni $t \in \left(0, \dfrac{1}{x}\right)$

$$e^{-t^2} \;>\; e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Tenuto conto di questo e della monotonia dell'integrale:

$$2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;>\; 2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x^2}}\, dt \;=\; 2\,x\, \frac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{x^2}} \;=\; 2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \;>\; e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{10}$$

Se invece $x < 0$ la funzione $t \to e^{-t^2}$ è strettamente crescente su $(-\infty, 0)$ e quindi per ogni $t \in \left(\dfrac{1}{x}, 0\right)$ il suo valore risulta maggiore di quello assunto sul primo estremo, ovvero per ogni $t \in \left(\dfrac{1}{x}, 0\right)$

$$e^{-t^2} \;>\; e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$2\,x \int_{\frac{1}{x}}^0 e^{-t^2}\; dt \;<\; 2\,x \int_{\frac{1}{x}}^0 e^{-\frac{1}{x^2}}\, dt \;=\; 2\,x\, \frac{-1}{x}\, e^{-\frac{1}{x^2}} \;=\; -2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \;<\; -e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{11}$$

Da cui per ogni $x < 0$

$$-2\,x \int_{\frac{1}{x}}^0 e^{-t^2}\; dt \;>\; e^{-\frac{1}{x^2}} \iff 2\,x \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;>\; e^{-\frac{1}{x^2}} \tag{12}$$

(e) Sia $x > 0$, allora

$$x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;<\; x \iff \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\; dt \;<\; \frac{1}{x},$$

Essendo poi per ogni $t \neq 0$ $e^{-t^2} < 1$, per la monotonia dell'integrale si ha per ogni $x > 0$

$$\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt < \int_0^{\frac{1}{x}} 1\ dt < \frac{1}{x}.$$

(f) Osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. Infatti

$$F(x) = x\ \frac{1}{\frac{1}{x}} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt$$

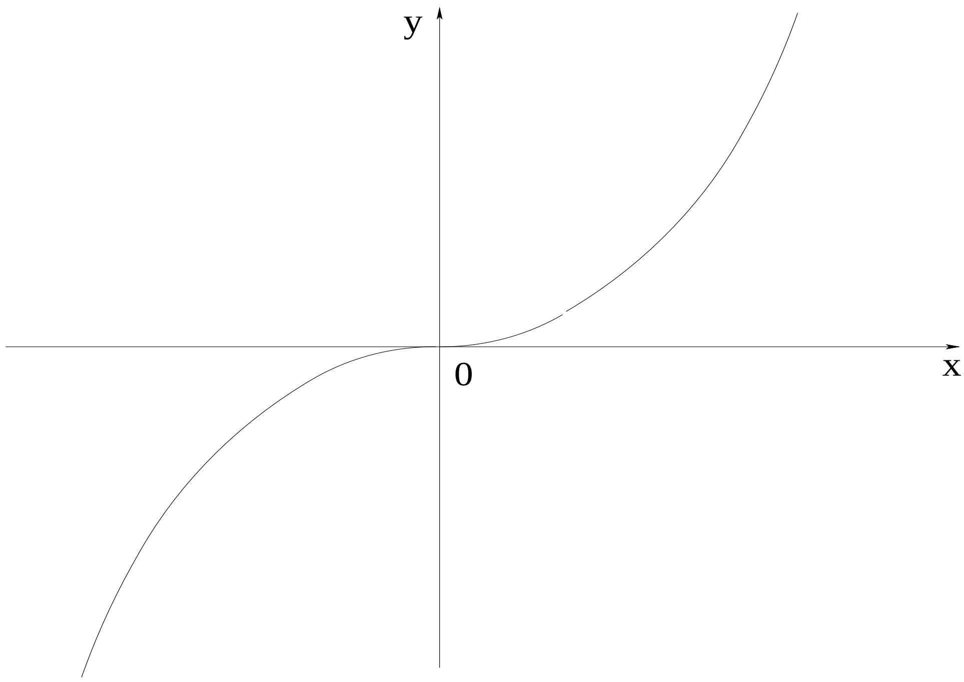
Ponendo $s = \dfrac{1}{x}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt = \lim_{s \to 0+} \frac{1}{s} \int_0^{s} e^{-t^2}\ dt = e^0 = 1$$

(g) Osserviamo che per ogni $x \neq 0$

$$F''(x) = 2 \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\ dt - 2\ e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right).$$

Procedendo in maniera analoga a quella vista sopra si stabilisce che $\lim_{x \to 0+} F''(x) > 0$, quindi in un intorno destro di $x = 0$. F'' risulta positiva e quindi F è convessa in tale intorno. Per il fatto che la funzione è dispari da questo segue anche che la funzione è concava in un intorno sinistro di $x = 0$.
Il grafico è dunque il seguente.



ESERCIZIO 4. (Punti 8)

Si consideri la successione

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{a_n}} e^{-x^2}\ dx \end{cases}$$

(a) Dimostrare che la successione è decrescente ed infinitesima.

(b) Stabilire il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Svolgimento.
(a) La successione data può essere scritta nella forma:

$$\begin{cases} a_0 \;=\; 1 \\ \\ a_{n+1} \;=\; F(a_n), \end{cases}$$

dove

$$F(x) \;=\; x^2 \;\int_0^{\frac{1}{x}} \; e^{-t^2} \; dt.$$

Verifichiamo per induzione che a_n è decrescente

$$a_1 = a_0^2 \;\int_0^{\frac{1}{a_0}} \; e^{-x^2} \; dx \;=\; \int_0^1 \; e^{-x^2} \; dx,$$

ed osserviamo che poiché per ogni $x \in (0, 1)$ risulta

$$0 \;<\; e^{-x^2} \;<\; 1,$$

e quindi

$$a_1 \;=\; \int_0^1 \; e^{-x^2} \; dx \;<\; \int_0^1 \; 1 \; dx \;=\; 1 \;=\; a_0.$$

Verifichiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ se $a_{n+1} \;<\; a_n$ allora $a_{n+2} \;<\; a_{n+1}$. Infatti tenuto conto del risultato (d) dell'Esercizio 3 si ha che F è crescente e quindi

$$a_{n+1} < a_n \Longrightarrow F(a_{n+1}) < F(a_n) \;\Longleftrightarrow\; a_{n+2} < a_{n+1}.$$

Osserviamo inoltre che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq 0$, perché la funzione integranda è positiva.
Tenuto conto di queste osservazioni la successione ammette limite $l \in \mathbb{R}$ per il teorema di regolarità delle successioni monotone.
In particolare l deve soddisafare l'equazione che si ottiene passando al limite nella successione ricorsiva:

$$l \;=\; l^2 \;\int_0^{\frac{1}{l}} \; e^{-t^2} \; dt \;\Longleftrightarrow\; l = F(l) \tag{13}$$

Osserviamo che $l \geq 0$ perché la successione è a termini positivi. Se fosse $l > 0$ l'equaizione (13) sarebbe in contraddizione con il punto (f) dell'Esercizio 3: $F(l) < l$ quindi l'unica soluzione è $l = 0$.

(b) Trattandosi di una serie a termini positivi applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^2 \;\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a_n}} \; e^{-x^2} \; dx}{a_n} \;=\; \lim_{n\to+\infty} a_n \;\int_0^{\frac{1}{a_n}} \; e^{-x^2} \; dx \;=\; 0 \;<\; 1.$$

La serie risulta quindi convergente.
Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato le considerazioni fatte al punto b dell'Esercizio 3.