ANALISI MATEMATICA I-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 30/6/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 6+3)

Si considerino i numeri complessi della forma

$$z_n = w^n + i\,\overline{w}^{\,n},$$

dimostrare che, posto $\rho = |w|$, si ha

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \le 2\,\rho^n$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $arg\ z_n = \dfrac{\pi}{4}$ oppure $arg\ z_n = \dfrac{5}{4}\,\pi$.

(c)* Determinare la relazione che deve intercorrere tra n e arg w affinché si abbia

$$|z_n| = 2\,\rho^n$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[5]{1+3x} + \sin x^2}{\tan 4x - x^3}.$$

ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Determinare al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{\log(1 + 3\,n^x) - \sin 2n^x}{e^{6n^x} - \cos 3\,n^x}.$$

ESERCIZIO 4. (Punti 8)

Stabilire al variare del parametro $\alpha > 0$ l'esistenza del limite della successione ed eventualmente calcolarlo.

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{10\,a_n} - \sqrt{a_n} \end{cases}$$

SOLUZIONI.

ESERCIZIO 1. (Punti 6+3)

Si considerino i numeri complessi della forma

$$z_n = w^n + i\,\overline{w}^{\,n},$$

dimostrare che, posto $\rho = |w|$, si ha

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq 2\,\rho^n$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $arg\ z_n = \dfrac{\pi}{4}$ oppure $arg\ z_n = \dfrac{5}{4}\,\pi$.

(c)* Determinare la relazione che deve intercorrere tra n e $\arg w$ affinché si abbia

$$|z_n| = 2\,\rho^n$$

Svolgimento.
(a) Applichiamo la diseguaglianza triangolare:

$$|z_n| = |w^n + i\,\overline{w}^{\,n}| \leq |w^n| + |i\,\overline{w}^{\,n}| = |w^n| + |i|\,|\overline{w}^n| = |w^n| + |w|^n = 2|w|^n = 2\rho^n. \tag{1}$$

Perché: $|i| = 1$ e $|\overline{w}^n| = |\overline{w}|^n = |w|^n$.

(b) Esprimiamo w in forma trigonometrica:

$$w = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

Da cui per la formula di De Moivre

$$w^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta) \quad \text{e} \quad \overline{w}^n = \rho^n\,(\cos n\theta - i\,\sin n\theta).$$

Possiamo di conseguenza scrivere

$$z_n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta) + i\,\rho^n\,(\cos n\theta - i\,\sin n\theta) = \rho^n[\cos n\theta + \sin n\theta + i\,(\cos n\theta + \sin n\theta)].$$

Questa espressione ci permette di osservare che il numero complesso z_n ha la parte immaginaria $\cos n\theta + \sin n\theta$ uguale alla parte reale $\cos n\theta + \sin n\theta$. I numeri complessi che hanno questa proprietà sono tutti e soli i numeri aventi argomento principale uguale a $\frac{\pi}{4}$ oppure uguale a $\frac{5}{4}\,\pi$. Infatti se $z = x + iy$ e $x = y$, con $x, y \neq 0$ allora $\tan\phi = \frac{x}{y} = \frac{x}{x} = 1$ da cui $\phi = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ovvero (nel primo giro) $\phi = \frac{\pi}{4}$ oppure uguale a $\phi = \frac{5}{4}\,\pi$.

$(c)^*$
Sopra abbiamo osservato che
$z_n = \rho^n[\cos n\theta + \sin n\theta + i\,(\cos n\theta + \sin n\theta)]$. Affinché risulti $z_n = 2\rho^n$ si deve avere che

$$|\cos n\theta + \sin n\theta + i\,(\cos n\theta + \sin n\theta)| = 2$$

ovvero

$$\sqrt{(\cos n\theta + \sin n\theta)^2 + (\cos n\theta + \sin n\theta)^2} = 2,$$

che equivale a

$$2\ \sin n\theta\ \cos n\theta = 1 \iff \sin 2\,n\,\theta = 1 \iff 2\,n\,\theta = \frac{\pi}{2} + k\,2\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La relazione che deve intercorrere tra n e $arg\ w$ è la seguente

$$n\,\theta = \frac{\pi}{4} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 8)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{1+2x}\ -\ \sqrt[5]{1+3x}\ +\ \sin x^2}{\tan 4x\ -\ x^3}.$$

Svolgimento.

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite:

$$\sqrt[3]{1+2x} = 1 + \frac{2}{3}x\ +\ o(x)$$

$$\sqrt[5]{1+2x} = 1 + \frac{3}{5}x\ +\ o(x)$$

$$\sin^2 x\ =\ (x+o(x))^2\ =\ x^2 + o(x^2)$$

$$\tan 4x = 4x + o(x)$$

Sostituiamo nell'espressione del limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{1+2x}\ -\ \sqrt[5]{1+3x}\ +\ \sin x^2}{\tan 4x\ -\ x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+\frac{2}{3}x\ +\ o(x)\ -\ 1-\frac{3}{5}x\ +\ o(x)\ +\ x^2+o(x^2)}{4x+o(x)\ -\ x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{15}x\ +\ o(x)}{4x+o(x)}, \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{15}x}{4x} = \frac{1}{60}.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il principio di sostituzione degli infinitesimi. Nei passaggi precedenti invece abbiamotenuto conto delle seguenti proprietà degli "o-piccoli":
$x^2+o(x^2) = o(x)$, $o(x)+o(x) = o(x)$, $\pm x^3 = o(x)$.

ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Determinare al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1\ +\ 3\,n^x)\ -\ \sin 2n^x}{e^{6n^x}\ -\ \cos 3\,n^x}.$$

Svolgimento. Distinguiamo i casi $x > 0$ e $x < 0$.
Se $x = 0$ il valore del limite è ovviamente uguale a $\dfrac{\log 4\ -\ \sin 2}{e^6\ -\ \cos 2}$.

Caso $x > 0$.
Poiché per $x > 0$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} n^x = +\infty$, possiamo cambiare variabile nel limite e calcolarlo come segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1\ +\ 3\,n^x)\ -\ \sin 2n^x}{e^{6n^x}\ -\ \cos 3\,n^x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1\ +\ 3\,y)\ -\ \sin 2y}{e^{6y}\ -\ \cos 3\,y} = \lim_{\to+\infty} \frac{\log(1+3y)}{e^{6y}} \frac{1-\frac{\sin 2y}{\log(1+3y)}}{1-\frac{\cos 3y}{e^{6y}}} = 0$$

Perché

$$0 \le \frac{|\sin 2y|}{\log(1+3y)} \le \frac{1}{\log(1+3y)},$$

il termine al secondo membro tende a zero per y che tende ad infinito.

$$0 \le \frac{|\cos 3y|}{e^{6y}} \le \frac{1}{e^{6y}},$$

il termine al secondo membro tende a zero per y che tende ad infinito. Infine per $y > 0$

$$0 < \frac{\log(1+3y)}{e^{6y}} \leq \frac{3y}{e^{6y}},$$

che tende a zero per y che tende ad infinito.

Caso $x < 0$.
Osserviamo in questo caso che $\lim_{n\to+\infty} n^x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{|x|}} = 0$. Possiamo cambiare variabile nel limite ponendo $y = n^x$, ed osservando che per $n \to +\infty$ si ha che $y \to 0+$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1 + 3\,n^x) - \sin 2n^x}{e^{6n^x} - \cos 3\,n^x} = \lim_{y\to 0+} \frac{\log(1 + 3\,y) - \sin 2y}{e^{6y} - \cos 3\,y} =$$

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite:
$\log(1+3y) = 3y + o(y)$, $\sin 2y = 2y + o(y)$, $e^{6y} = 1 + 6y + o(y)$, $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$. Sostituiamo

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\log(1 + 3\,y) - \sin 2y}{e^{6y} - \cos 3\,y} = \lim_{y\to 0+} \frac{3y + o(y) - 2y + o(y)}{1 + 6y + o(y) - 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)} = \lim_{y\to 0+} \frac{y + o(y)}{6y + o(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{y}{6y} = \frac{1}{6}.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il principio di sostituzione degli infinitesimi. Nei passaggi precedenti le seguenti proprietà degli "o-piccoli": $o(y) + o(y) = o(y)$, $\frac{1}{2}y^2 + o(y^2) = o(y)$.

ESERCIZIO 4. (Punti 8)

Stabilire al variare del parametro $\alpha > 0$ l'esistenza del limite della successione ed eventualmente calcolarlo.

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ \\ a_{n+1} = \sqrt{10\,a_n} - \sqrt{a_n} \end{cases}$$

Svolgimento.
Determiniamo per quali valori di α la successione è ben definita. È evidente che se $\alpha > 0$ è sempre ben definita perché, per induzione: $a_0 = \alpha > 0$ e $a_n > 0$ implica $a_{n+1} = \sqrt{10\,a_n} - \sqrt{a_n} = \sqrt{a_n}(\sqrt{10} - 1) > 0$.
Osserviamo inoltre che $a_0 = \alpha < a_1 = \sqrt{\alpha}(\sqrt{10} - 1)$ se e solo se
$0 < \alpha < 11 - 2\sqrt{10}$.
Mentre $a_0 = \alpha > a_1 = \sqrt{\alpha}(\sqrt{10} - 1)$ se e solo se
$\alpha > 11 - 2\sqrt{10}$.
La funzione $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{10} - 1)$ risulta crescente:
$\forall x_1, x_2 > 0, \quad 0 < x_1 < x_2 \iff \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \iff \sqrt{x_1}(\sqrt{10} - 1) < \sqrt{x_2}(\sqrt{10} - 1)$.
Possiamo quindi osservare che, se $0 < \alpha < 11 - 2\sqrt{10}$, la successone è crescente in quanto, per induzione $a_0 < a_1$ (vedi sopra) e $a_n < a_{n+1}$ implica $a_{n+1} = f(a_n) < f_(a_{n+1}) = a_{n+2}$.
Osserviamo anche che la successione è limitata superiormente dal valore $11-2\sqrt{10}$. Infatti $a_0 = \alpha < 11-2\sqrt{10}$, e se $a_n < 11 - 2\sqrt{10}$ si ha che $a_{n+1} < 11 - 2\sqrt{10}$ perché

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}(\sqrt{10} - 1) < \sqrt{(11 - 2\sqrt{10})}(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{(\sqrt{10} - 1)^2}(\sqrt{10} - 1) = 11 - 2\sqrt{10}.$$

La successione data è quindi monotona crescente e limitata superiormente, per il teorema di regolarità delle successioni monotone ammette limite reale l che calcoliamo risolvendo l'equazione

$$l = \sqrt{l}(\sqrt{10} - 1).$$

Questa ammette suluzioni $l_1 = 0$ e $l_2 = 11 - 2\sqrt{10}$. $l_1 = 0$ si scarta perché non è di accomulazione per la successione in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ ed è crescente. Il limite nel caso $0 < \alpha < 11 - 2\sqrt{10}$ è quindi $l = 11 - 2\sqrt{10}$.

Se $\alpha > 11 - 2\sqrt{10}$ allora la successione è decrescente. Infatti, procedendo per induzione si ha, per quanto visto sopra, $a_0 = \alpha > a_1 = \sqrt{\alpha}(\sqrt{10} - 1)$, mentre $a_n > a_{n+1}$ implica $a_{n+1} = f(a_n) > f(a_{n+1}) = a_{n+2}$ Inoltre per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > 0$. Da questo deduciamo che la successione è limitata inferiormente. Per il teorema sulle succesioni monotone ammette limite reale l.
Il valore di tale limite si deduce nello stesso modo visto in precedenza. Troviamo i valori $l_1 = 0$ e $l_2 = 11 - 2\sqrt{10}$. Il valore $l_1 = 0$ si esclude in quanto risulta per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 11 - 2\sqrt{10}$. Per verificare questo si procede per induzione.
$a_0 = \alpha > 11 - 2\sqrt{10}$, per ipotesi.
$a_n > 11 - 2\sqrt{10}$ implica $a_{n+1} > 11 - 2\sqrt{10}$ perché

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}(\sqrt{10} - 1) > \sqrt{(11 - 2\sqrt{10})}(\sqrt{10} - 1) = \sqrt{(\sqrt{10} - 1)^2}(\sqrt{10} - 1) = 11 - 2\sqrt{10}.$$

Infine se $\alpha = 11 - 2\sqrt{10}$, la successione è costantantemente uguale a questo valore che ne risulterà quindi anche il limite.