ANALISI MATEMATICA I+II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 20/7/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

ESERCIZIO 1. (Punti 7)

Calcolare mediante la formula di Taylor il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\sin(\sqrt{1+4x}\, - 1)\right]^2 \, - \log(1+4x^2)}{e^{-2x^2} \, - \cos 2x}$$

ESERCIZIO 2. (Punti 7)

Data l'equazione

$$x^5 + n\,x - n = 0, \quad n \in N \setminus \{0\},$$

(a) dimostrare che ammette una ed una sola radice $x_n > 0$;

(b) calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

ESERCIZIO 3. (Punti 7)

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) & = t^4\,(\sin t)^4 \\ u\left(\dfrac{15}{2}\right) & = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

(i) Determinare l'espressione che definisce in maniera implicita la soluzione u.

(ii) Determinare l'intervallo massimale di esistenza di u.

(iii) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} u(t)$.

(iii) Tracciare un grafico approssimato di u.

ESERCIZIO 4. (Punti 5)

Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,n^2 + 5\,e^n}{n^3 + e^{2n}}.$$

ESERCIZIO 5. (Punti 7)

Risolvere il seguente sistema nel campo complesso

$$\begin{cases} 2\,i\,w^3 + \overline{w} = 4\,i\,w^5 \\ |w| = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONI.

ESERCIZIO 1. (Punti 7)

Calcolare mediante la formula di Taylor il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\sin(\sqrt{1+4x}\ -1)\right]^2\ -\log(1+4x^2)}{e^{-2x^2}\ -\cos 2x}$$

Svolgimento.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor, con punto iniziale $x_0 = 0$, delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite cominciando con la radice quadrata.

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2), \quad \text{posto } t = 4x, \text{ abbiamo } \sqrt{1+4x}\ = 1 + 2x - 4x^2 + o(x^2).$$

da cui

$$\sqrt{1+4x} - 1 = 2x - 4x^2 + o(x^2).$$

$$\sin^2 t = [t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)]^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4),$$

$$\text{posto } t = 2x - 4x^2 + o(x^2), \text{ abbiamo}$$

$$\sin^2(\sqrt{1+4x} - 1) = [2x - 4x^2 + o(x^2)]^2 - \frac{1}{3}[2x - 4x^2 + o(x^2)]^4 + o([2x - 4x^2 + o(x^2)]^4) = 4x^2 - 16x^3 + o(x^3).$$

Perché

$$\begin{aligned}[2x - 4x^2 + o(x^2)]^2 &= 4x^4 - 16x^3 + 16x^4 + o(x^4) + 4xo(x^2) - 8x^2o(x^2) = \\ &= 4x^4 - 16x^3 + o(x^3) + o(x^4) + o(x^3) + o(x^4) = 4x^4 - 16x^4 + o(x^3); \\ \left[2x - 4x^2 + o(x^2)\right]^4 &= x^4 + o(x^4) = o(x^3)\end{aligned}$$

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), \text{ posto } t = 4x^2, \text{ abbiamo } \log(1+4x^2) = 4x^2 - 8x^4 + o(x^4),$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2), \text{ posto } t = -2x^2, \text{ abbiamo } e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4), \text{ posto } t = 2x, \text{ abbiamo } \cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Quanto ottenuto finora ci permette di scrivere

$$\left[\sin(\sqrt{1+4x}\ -1)\right]^2\ -\log(1+4x^2) = 4x^2 - 16x^3 + o(x^3) - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) = -16x^3 + o(x^3)$$

$$e^{-2x^2}\ -\cos 2x = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) - 1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

Sostituiamo nel limite, applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi e semplifichiamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\sin(\sqrt{1+4x}\ -1)\right]^2\ -\log(1+4x^2)}{e^{-2x^2}\ -\cos 2x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-16x^3 + o(x^3)}{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = -12 \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = -\infty.$$

ESERCIZIO 2. (Punti 7)

Data l'equazione

$$x^5 + n\,x - n = 0, \quad n \in N \setminus \{0\},$$

(a) dimostrare che ammette una ed una sola radice $x_n > 0$;

(b) calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Svolgimento.

(a)
Le radici dell'equazione coincidono con gli zeri della funzione

$$f(x) = x^5 + n\,x - n$$

Osserviamo che f, trattandosi di un polinomio, è continua su $\mathbb{R}$, inoltre $f(0) = -n$, $f(1) = 1$. Per il teorema sugli zeri delle funzioni continue esiste almeno un punto $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) = 0$. Per dimostrare l'unicità è sufficiente osservare che la derivata prima di f è sempre positiva e quindi f è strettamente monotona:

$$f'(x) = 5x^4 + n > 0.$$

(b)
Si ha $f''(x) = 20x^3 > 0$ per ogni $x > 0$. f risulta convessa in $(0, +\infty)$. Di conseguenza se consideriamo la corda che congiunge i punti $(0, f(0)) = (-n, 0))$ e $(1, f(1)) = (1, 1)$ si ha che questa si trova, in $(0, 1)$, al disopra del grafico di f. Ovvero si ha che la retta passante per i punti $(-n, 0)$, $(1, 1)$ che ha equazione $y = x(n + 1) - n$, verifica

$$\forall x \in (0, 1): \quad x(n + 1) - n > f(x).$$

Da quanto detto finora si ha $x_n(n + 1) - n > f(x_n) = 0$ ovvero, essendo anche $x_n \in (0, 1)$

$$\frac{n}{n+1} < x_n < 1.$$

Da questa deduciamo

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

ESERCIZIO 3. (Punti 8)

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) & = t^4\ [\sin\, u(t)]^4 \\ u\left(\dfrac{15}{2}\right) & = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

(i) Determinare l'espressione che definisce in maniera implicita la soluzione u.

(ii) Determinare l'intervallo massimale di esistenza di u.

(iii) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} u(t)$.

(iii) Tracciare un grafico approssimato di u.

Svolgimento.
Posto $A(t) = t^4$ e $B(u) = \sin^4 u$, osserviamo che il dato iniziale è compreso tra due radici di B, ovvero tra 0 e π, mentre A è definita su tutto $\mathbb{R}$. La soluzione esisterà e sará unica su tutto $\mathbb{R}$. Per calcolarla consideriamo l'equazione

$$\frac{u'(t)}{\sin^4 u(t)} = t^4,$$

ed integriamo tra $\frac{15}{2}$ e t :

$$\int_{\frac{15}{2}}^{t} \frac{u'(s)}{\sin^4 u(s)}\, ds = \int_{\frac{15}{2}}^{t} s^4\, ds.$$

Al secondo membro si ha

$$\int_{\frac{15}{2}}^{t} s^4\, ds = \left[\frac{1}{5} t^5\right]_{\frac{1}{15}}^{t} = \frac{1}{5}\, t^5 - \frac{1}{5} \frac{(15)^5}{32}.$$

Al primo membro effettuiamo il cambiamento di variabile $r = u(t)$, e quindi per $t = \frac{15}{2}$ $r = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{15}{2}}^{t} \frac{u'(s)}{\sin^4 u(s)}\, ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{u(t)} \frac{1}{\sin^4 r}\, dr = \int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \frac{(1+\sigma^2)^4}{16\,\sigma^4} \frac{2}{1+\sigma^2}\, d\sigma = \int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \frac{1+3\sigma^2+3\sigma^4+\sigma^6}{8\,\sigma^4}\, d\sigma.$$

Nel 'integrale sopra abbiamo effettuato il cambiamento di variabile:

$$\tan\frac{r}{2} = \sigma, \text{ quindi } dr = \frac{2}{1+\sigma^2}\, d\sigma, \ \sin r = \frac{2r}{1+\sigma^2}.$$

Procedendo nel calcolo abbiamo

$$\int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \frac{1+3\sigma^2+3\sigma^4+\sigma^6}{8\,\sigma^4}\, d\sigma = \int_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^4} + 3\frac{1}{\sigma^2} + 3 + \sigma^2\right) d\sigma = \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{\sigma^3} - \frac{3}{\sigma} + 3\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3\right]_{1}^{\tan\frac{u(t)}{2}} =$$

$$= \frac{-1}{24} \frac{1}{\tan^3\frac{u(t)}{2}} - \frac{3}{8} \frac{1}{\tan\frac{u(t)}{2}} + \frac{3}{8} \tan u(t) + \frac{1}{24} \tan^3 \frac{u(t)}{2} - \frac{35}{12}.$$

In definitiva la soluzione del problema di Cauchy proposto è data implicitamente dall'espressione:

$$\frac{-1}{24} \frac{1}{\tan^3\frac{u(t)}{2}} - \frac{3}{8} \frac{1}{\tan\frac{u(t)}{2}} + \frac{3}{8} \tan u(t) + \frac{1}{24} \tan^3 \frac{u(t)}{2} - \frac{35}{12} = \frac{1}{5}\, t^5 - \frac{1}{5} \frac{(15)^5}{32}.$$

Per risolvere il punto (iii) deduciamo, dall'equazione, che la derivata prima dalla soluzione è sempre positiva in quanto il termine al secondo membro, $t^4 \sin^4 u(t)$ è sempre maggiore di zero. Di conseguenza u è monotona crescente. Per il teorema di regolarità delle funzioni monotone u ammette limite sia per x che tende a $+\infty$ sia per x che tende a $-\infty$. Tale limite è un numero reale l in quanto u è limitata tra 0 e π, che sono gli zeri di B (vedi le considerazioni che abbiamo fatto all'inizio sulla tesi del teorema di essitenza di soluzioni delle equazioni differenziali a variabili separabili).
Per calcolare l integriamo primo e secondo membro dell'equazione di partenza

$$u(t) - \frac{15}{2} = \int_{\frac{15}{2}}^{t} u'(s)\, ds = \int_{\frac{15}{2}}^{t} s^4\, [\sin u(s)]^4\, ds$$

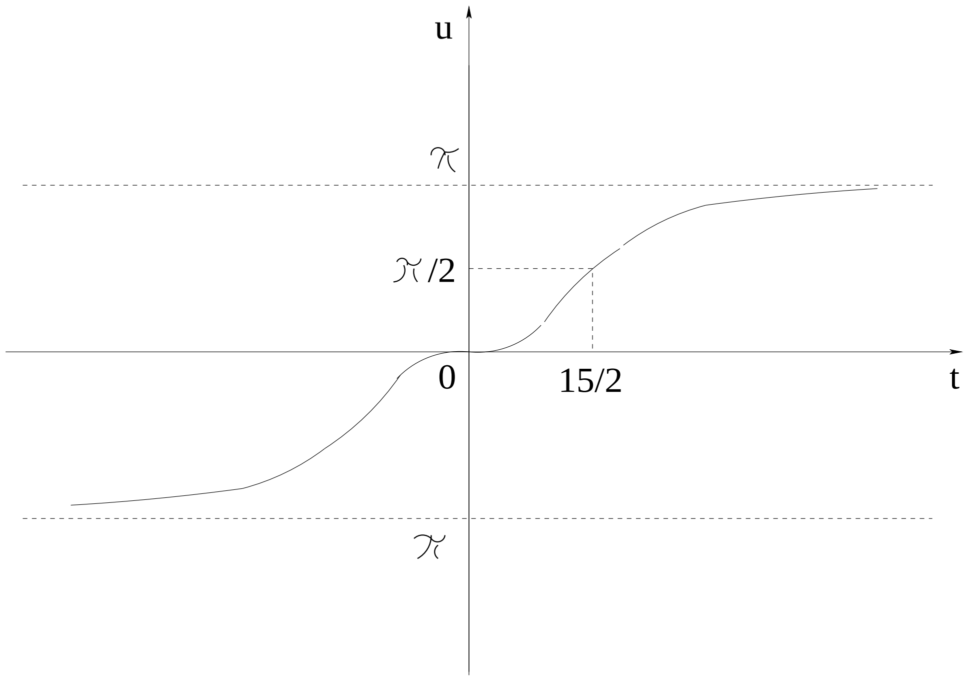
ovvero

$$u(t) = \frac{15}{2} + \int_{\frac{15}{2}}^{t} s^4\, [\sin u(s)]^4\, ds \tag{1}$$

Se fosse $\lim\limits_{x\to+\infty} u(t) = l$ con $0 < l < \pi$ si avrebbe $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin^4 u(t) = \sin^4 l \neq 0$. Ma in questo caso in (1) il primo membro tenderebbe al valore finito l mentre il secondo membro andrebbe a $+\infty$. Infatti, dato che $\sin^4 u(t)$ tende a $\sin^4 l$ per t che tende a $+\infty$, esisterebbe t_0 tale che per ogni $t > t_0$ $\sin^4 u(t) > \dfrac{\sin^4 l}{2}$. In tal caso in (1) si avrebbe

$$u(t) \;=\; \frac{15}{2} + \int_{\frac{15}{2}}^{t} \; s^4\,[\sin\,u(s)]^4\,ds \;>\; \int_{\frac{15}{2}}^{t} \; \frac{15}{2}\;\frac{\sin^4 l}{2} \;>\; \left(t - \frac{15}{2}\right)\frac{15}{2}\;\frac{\sin^4 l}{2} \;\;\overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Assurdo perché u è limitata. Quindi L'unica possibilità è che $l = \pi$. Nello stesso modo si ragione se $x \to -\infty$ per stabilire che $l = 0$.
Il grafico di u è il seguente.



ESERCIZIO 4. (Punti 5)

Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \; \frac{2\,n^2 \,+\, 5\,e^n}{n^3 \,+\, e^{2n}}.$$

Svolgimento.

Il termine generale della serie è positivo. Possiamo applicare il criterio della convergenza asintotica confrontandolo con la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$, in quanto l'infinito più forte al numeratore del termine generale della serie data è e^n mentre al denominatore è e^{2n}.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2\,n^2 + 5\,e^n}{n^3 + e^{2n}}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n}\,\left(\frac{2n^2}{e^n} \,+\, 5\right)}{e^{2n}\,\left(\frac{n^3}{e^2 n} \,+\, 1\right)} \;=\; 5$$

Quindi la serie data è convergente in quanto ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$, che è una serie geometrica di ragione $0 < e^{-1} < 1$.

ESERCIZIO 5. (Punti 7)

Risolvere il seguente sistema nel campo complesso

$$\begin{cases} 2\,i\,w^3 \,+\, \overline{w} \,=\, 4\,i\,w^5 \\ |w| \,=\, 1. \end{cases}$$

Svolgimento.

Moltiplichiamo per w il primo e secondo membro della prima equazione:

$$2\,i\,w^4 \,+\, \overline{w}\,w \,=\, 4\,i\,w^6.$$

Tenuto conto della seconda equazione e del fatto che $\overline{w}\,w \,=|w|^2$ si ha

$$2\,i\,w^4 \,+\, 1 \,=\, 4\,i\,w^6 \iff 4i\,w^6 \,-\, 2i\,w^4 \,-\, 1 \,=\, 0$$

Poniamo $z = w^2$, con $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$4i\,z^3 \,-\, 2i\,z^2 \,-\, 1 \,=\, 0$$

Essendo $|z| = |w^2| = |w|^2 = 1$ e $\overline{z}z = |z^2| = 1$ si ha

$$4i\,z^3 \,-\, 2i\,z^2 \,-\, z\overline{z} \,=\, 0 \iff 4i\,z^2 \,-\, 2i\,z \,-\, \overline{z} \,=\, 0$$

$$\begin{aligned} 4i\,z^2 \,=\, 2i\,z \,+\, \overline{z} \iff |4iz^2| = |2i(x+iy) + x - iy| \iff \\ \iff |4i||z^2| = |(x-2y) + i(2x-y)| \iff 4|i||z|^2 = \sqrt{(x-2y)^2 + (2x-y)^2} \iff \\ \iff 16 = (x-2y)^2 + (2x-y)^2 \iff 11 = -8xy. \end{aligned}$$

Questo è assurdo perché $|z| = 1$ equivale a $x^2 + y^2 = 1$, e quindi deve essere $|xy| \leq 1$, mentre

$$11 = -8xy \Longrightarrow |xy| = \frac{11}{8} > 1.$$

Il sistema dato non ha soluzioni.