ANALISI MATEMATICA II-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 29/1/2010

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1.(Punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^2 3x \; - \; \sin^2 3x}{e^{-2x^2} \; - \; \cos 2x}.$$

Esercizio 2.(Punti 6)

Stabilire l'andamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \;\, 2^n}{[(n+1)! \; n \; + \; 5] \; 3^n}.$$

Esercizio 3. (Punti 10)

Si consideri la funzione

$$f(x) \; = \; (x+2) \; e^{-(x^2-x)}$$

(a) Determinare campo di esistenza, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o di minimo relativo (se esistono).

(c) Determinare gli intervalli di concavità o convessità ed eventuali flessi.

(d) Tracciare un grafico approssimato di f.

Esercizio 4. (Punti 10)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{\sqrt{4-t} \;\; \log t}{[u(t)]^2}, & t \in (0,4], \\ \\ u(1) = \; 3. \end{cases}$$

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1.(Punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^2 3x \, - \, \sin^2 3x}{e^{-2x^2} \, - \, \cos 2x}.$$

Svolgimento.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor relativi alle funzioni che compaiono nell'espressione di cui si deve calcolare il limite.

$$\sin^2 3x \, = \, \left[3x \, - \, \frac{9}{2}\, x^3 \, + \, o(x^3)\right]^2 \, = \, 9\, x^2 \, - \, 27\, x^4 \, + \, o(x^4);$$

$$\tan^2 3x \, = \, \left[3x \, + \, 9\, x^3 \, + \, o(x^3)\right]^2 \, = \, 9\, x^2 \, + \, 54\, x^4 \, + \, o(x^4);$$

$$\tan^2 3x \, - \, \sin^2 3x \, = \, 81\, x^4 \, + \, o(x^4);$$

$$\cos 2x \, = \, 1 \, - \, 2\, x^2 \, + \, \frac{2}{3}\, x^4 \, + \, o(x^4);$$

$$e^{-2x^2} \, = \, 1 \, - \, 2x^2 \, + \, 2\, x^4 \, + \, o(x^4);$$

$$e^{-2x^2} \, - \, \cos 2x \, = \, \frac{4}{3}\, x^4 \, + \, o(x^4).$$

Sostituendo ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi otteniamo infine:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^2 3x \, - \, \sin^2 3x}{e^{-2x^2} \, - \, \cos 2x} \, = \, \lim_{x\to 0+} \frac{81x^4 \, + \, o(x^4)}{\frac{4}{3}\, x^4 \, + \, o(x^4)} \, = \, \lim_{x\to 0+} \frac{81\, x^4}{\frac{4}{3}\, x^4} \, = \, \frac{243}{4}.$$

Esercizio 2.

Stabilire l'andamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \;\, 2^n}{[(n+1)! \; n \, + \, 5] \; 3^n}.$$

Svolgimento.

Il termine generale della serie è sempre positivo, possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico calcolando il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n! \;\, 2^n}{[(n+1)! \; n \, + \, 5] \; 3^n}}{\dfrac{1}{n^2} \, \dfrac{2^n}{3^n}} \, = \, \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)\, n \, + \, \dfrac{5}{n!}} \, = \, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \, + \, \dfrac{5}{n!\, n^2}} \, = \, 1$$

La serie data si comporta quindi come la seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2\ 3^n},$$

che è convergente. Infatti, trattandosi di una serie a termini positivi, basta applicare il criterio del confronto:

$$\frac{2^n}{n^2\ 3^n} \le \frac{1}{n^2}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

è armonica con esponente maggiore di 1 e quindi convergente. In definitiva la seria data converge.

Esercizio 3.

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x+2)\ e^{-(x^2-x)}$$

(a) Determinare campo di esistenza, limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o di minimo relativo (se esistono).

(c) Determinare gli intervalli di concavità o convessità ed eventuali flessi.

(d) Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

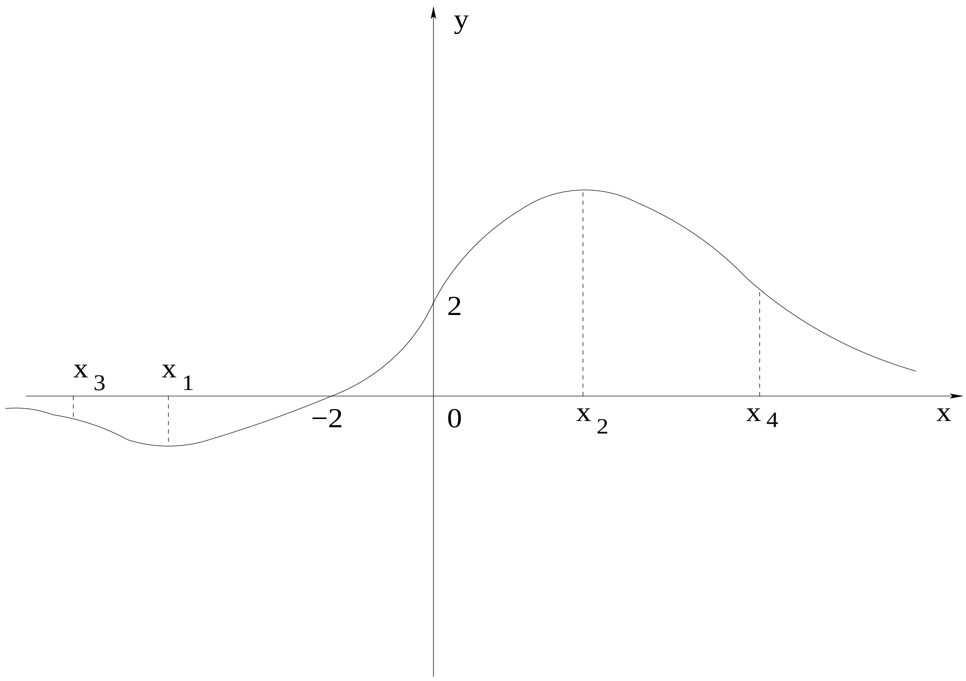
La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ed inoltre $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} f(x) = 0^{\pm}$: l'asse delle x è asintoto per f sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nel punto $x = -2$.
Calcoliamo la derivata prima per determinare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = -\,e^{-(x^2-x)}\,(2x^2 + 3x - 3)$$

Gli zeri di f' sono $x_{1,2} = -\dfrac{3}{4} \pm \dfrac{\sqrt{33}}{4}$.
f' è positiva nell'intervallo (x_1, x_2), negativa all'esterno di esso, di conseguenza f è monotona crescente su (x_1, x_2), decrescente su $(-\infty, x_1)$ e su $(x_2, +\infty)$.
Calcoliamo la derivata seconda per determinare gli intervalli dove la funzione è convessa o concava

$$f''(x) = e^{-(x^2-x)}\,(4x^3 + 4x^2 - 13x) = e^{-(x^2-x)}\,x\,(4x^2 + 4x - 13).$$

Gli zeri di f'' sono $x_{3,4} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{14}}{2}$, e $x_5 = 0$.
La funzione f'' risulta positiva sugli intervalli (x_3, x_5), $(x_5, +\infty)$, e su $(-\infty, x_3)$, (x_5, x_4) è negativa. Di conseguenza f è convessa sugli intervalli (x_3, x_5), $(x_5, +\infty)$, e concava su $(-\infty, x_3)$, (x_5, x_4). I punti x_3, x_4, x_5 sono punti di flesso.
Possiamo riassumere le informazioni ottenute sopra tracciando il seguente grafico di f.



Esercizio 4.

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{\sqrt{4-t}\ \ \log t}{[u(t)]^2}, & t \in (0,4], \\ \\ u(1) = 3. \end{cases}$$

Svolgimento.

Osserviamo che $u'(t) > 0$, se $\log t > 0$, ovvero $1 < t \leq 4$, mentre $u'(t) < 0$, se $\log t < 0$, ovvero $0 < t < 1$. Di conseguenza il punto $t = 1$ è di minimo: per ogni $t \in (0,4]$ $u(t) \geq u(1) = 3$. L'equazione è ben definita sull'intervallo $(0,4]$ dove ammette una ed una sola soluzione per il Teorema di esistenza di Cauchy. Calcoliamo tale soluzione osservando che l'equazione è non lineare del tipo a variabili separabili. Calcoliamo la soluzione procedendo come segue.

$$\int_1^t u'(t)\,[u(s)]^2\ ds \ = \ \int_1^t \ \sqrt{4\ -\ s}\ \log s\ \ ds.$$

Il primo integrale fornisce

$$\int_1^t u'(t)\,[u(s)]^2\ ds\ =\ \frac{1}{3}\ \left[u^3(s)\right]_1^t\ =\ \frac{1}{3}\,u^3(t)\ -\ u^3(1) = \frac{1}{3}\,u^3(t)\ -\ 9.$$

Nel secondo integrale si opera il seguente cambiamento di variabile $s = 4 - r^2$, da cui $ds = -2r\,dr$, per $s = 1$ si ha $r = \sqrt{3}$, mentre per $s = t$ si ha $r = \sqrt{4-t}$, quindi

$$\int_1^t \ \sqrt{4\ -\ s}\ \ \log s\ \ ds\ =\ -2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}}\ r^2\ \ \log(4-r^2)\ \ dr.$$

Integriamo per parti

$$
\begin{aligned}
-2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}} r^2\ \log(4-r^2)\ dr \ &=\ -\frac{2}{3}\ \left[r^3\ \log(4-r^2)\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}}\ -\ \frac{4}{3}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}}\ \frac{r^4}{4-r^2}\ dr = \\
&= -\frac{2}{3}\ (4-t)\sqrt{4-t}\ \log t\ +\ \frac{4}{3}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}}\ \left(\frac{16\ -\ r^4}{4-r^2}\ -\ \frac{16}{4-r^2}\right)\ dr = \\
&= -\frac{2}{3}\ (4-t)\sqrt{4-t}\ \log t\ +\ \frac{4}{3}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}}\ \left(4\ +\ r^2\ -\ \frac{16}{4-r^2}\right)\ dr\ = \\
= -\frac{2}{3}\ (4-t)\sqrt{4-t}\ \log t\ +\ \frac{16}{3}\ \sqrt{4-t}\ &-\ \frac{16\sqrt{3}}{3}\ +\ \frac{16}{3}\sqrt{3}\ +\ \frac{4}{9}\,(4-t)\sqrt{4-t}\,+ \\
&+4\sqrt{3}-\ \frac{64}{3}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}}\ \frac{1}{4-r^2}\ dr\,.
\end{aligned}
$$

L'ultimo integrale si risolve mediante la tecnica di scomposizione delle funzioni razionali, ovvero determinando A, $B\in\mathbb{R}$ tali che

$$
\frac{1}{4-r^2}\ =\ \frac{A}{2-r}\ +\ \frac{B}{2+r}\ =\ \frac{(A-B)r\ +\ 2A\ +\ 2B}{(2-r)(2+r)}
$$

Da cui $A=\dfrac{1}{4}$, $B=\dfrac{1}{4}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
-2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-t}} r^2\ \log(4-r^2)\ dr\ &=\ -\frac{2}{3}\ (4-t)\sqrt{4-t}\ \log t\ +\ \frac{16}{3}\ \sqrt{4-t}\ +\ \frac{4}{9}\,(4-t)\sqrt{4-t}\,+ \\
&+4\sqrt{3}-\ \frac{16}{3}\ \log\left(\frac{2+\sqrt{4-t}}{2-\sqrt{4-t}}\right)\ +\ \frac{16}{3}\ \log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

In definitiva

$$
\begin{aligned}
u(t) = \Bigg[9\ -\ 2\ (4-t)\sqrt{4-t}\ \log t\ &+\ 16\sqrt{4-t}\ +\ \frac{4}{3}\,(4-t)\sqrt{4-t}\,+ \\
&+12\sqrt{3}-\ 16\ \log\left(\frac{2+\sqrt{4-t}}{2-\sqrt{4-t}}\right)\ +\ 16\ \log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)\Bigg]^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$