ANALISI MATEMATICA I-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta intermedia del 18/12/2008

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (Punti 8).

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{5\,a_n}{6 - a_n}}. \end{cases}$$

Dimostrare che ammette limite e calcolarne il valore.

Esercizio 2.(Punti 8).

Calcolare il valore dei seguenti limiti

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[5]{32+2x^4} - 2}{[\cos 5x - 1]^2}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos 2\,x^3)}{[\sin x^2]^3}.$$

Esercizio 3. (Punti 8)

Determinare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il valore dei seguenti limiti:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \log(1+n^x)}{\sqrt[n]{(2n)^n - n^n}}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} (n+1)!\,(e^{n^x} - 1)\,\log\left(1 + \sin\frac{1}{n!}\right).$$

Esercizio 4.(Punti 9)

Sia f una funzione continua definita sull'intervallo $[0,1]$ a valori nell'intervallo $[a,b]$, con $0 < a < b < 1$, sia inoltre

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : \ x^n - f(x) = 0\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(a) Dimostrare che $A_n \neq \emptyset$.

(b) Dimostrare che A_n ammette massimo.

(c) Posto $m_n = \max A_n$, si calcoli il valore del limite: $\lim_{n\to+\infty} f(m_n)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. (Punti 8).

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 & = & 3 \\ \\ a_{n+1} & = & \sqrt{\dfrac{5\,a_n}{6\,-\,a_n}}\,. \end{cases}$$

Dimostrare che ammette limite e calcolarne il valore.

Svolgimento
Verifichiamo che la successsione è ben definita, ovvero $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n < 6$, (quindi è anche limitata). Notiamo per prima cosa che: $a_1 < 3 = a_0$. Ci chiediamo se $a_n < 3$ implica che $a_{n+1} < 3$.

$$\sqrt{\frac{5\,a_n}{6\,-\,a_n}} < 3 \iff \frac{5\,a_n}{6\,-\,a_n} < 9 \iff a_n < \frac{27}{7},$$

che è verificata per l'ipotesi induttiva. Quindi per ogni $n \in \mathbb{N} : 0 < a_n \leq 3$.
Verifichiamo la monotonia della successione, per induzione, osservando che

$$a_0 = 3\, >\, \sqrt{5}\, =\, a_1,$$

e

$$a_n\, >\, a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1}\, >\, a_{n+2}.$$

Infatti:

$$\sqrt{\frac{5\,a_n}{6\,-\,a_n}} > \sqrt{\frac{5\,a_{n+1}}{6\,-\,a_{n+1}}} \iff \frac{5\,a_n}{6\,-\,a_n} > \frac{5\,a_{n+1}}{6\,-\,a_{n+1}} \iff$$
$$\iff 30a_n - 5a_n\,a_{n+1} > 30a_{n+1} - 5a_n\,a_{n+1} \iff a_n > a_{n+1}$$

Per il teorema di regolarità delle successioni monotone sappiamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n\, =\, l \in \mathbb{R}$. Passando al limite nella successione ricorsiva si ha

$$l\, =\, \sqrt{\frac{5\,l}{6\,-\,l}} \iff l^3 - 6l^2 + 5l = 0$$

che ha soluzioni $l_1 = 0$, $l_2 = 1$ e $l_3 = 5$. Poiché la successione è decrescente e minore di 3, il valore $l_2 = 5$ non può essere il suo limite perché non è punto di accumulazione per la successione. Inoltre, anche $l_1 = 0$ non può essere il limite in quanto $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 1$. Infatti $a_0 = 3 > 1$, inoltre se $a_n > 1$ anche $a_{n+1} = \dfrac{5a_n}{6 - a_n} > 1$ perché equivale all'ipotesi indutiva $a_n > 1$. Quindi il limite è $l_1 = 1$.

Esercizio 2.(Punti 8).

Calcolare il valore dei seguenti limiti

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[5]{32 + 2x^4}\, -\, 2}{[\cos\, 5x\, -\, 1]^2}; \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos 2\, x^3)}{[\sin\, x^2]^3}.$$

Svolgimento.

(a) Consideriamo gli sviluppi nell'intorno del punto zero delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite.

$$\sqrt[5]{32\,+\,2x^4}\;=\;\sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{1\,+\,\frac{1}{16}\,x^4}\;=\;2\,\left(1\,+\,\frac{1}{16}\,x^4\right)^{\frac{1}{5}}\;=\;2+\frac{1}{40}\,x^4\,+\,o(x^4).$$

Dove abbiamo utilizzato:

$$(1\,+\,y)^{\frac{1}{5}}\;=\;1\,+\,\frac{1}{5}\,y\,+\,o(y),\quad \text{con}\quad y=\frac{1}{16}\,x^4.$$

Mentre

$$\cos 5x\;=\;1\,-\,\frac{25}{2}\,x^2\,+\,o(x^2)$$

da cui

$$[\cos 5x-1]^2\;=\;\left[-\,\frac{25}{2}\,x^2+o(x^2)\right]^2\;=\;\frac{625}{4}\,x^4\,-\,25\,x^2\,o(x^2)+o(x^4)\;=\;\frac{625}{4}\,x^4\,+\,o(x^4).$$

Sostituendo nell'espressione del limite, ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0+}\;\frac{2+\frac{1}{40}\,x^4\,+\,o(x^4)-2}{\frac{625}{4}\,x^4\,+\,o(x^4)}\;=\;\lim_{x\to 0+}\;\frac{\frac{1}{40}\,x^4}{\frac{625}{4}\,x^4}\;=\;\frac{1}{6250}.$$

(b) Lo sviluppo di *cos* consente di scrivere:

$$\cos 2\,x^3\;=\;1\,-\,2\,x^6\,+\,o(x^6),$$

e quindi sostituendo e utilizzando lo sviluppo di *log*

$$\begin{aligned}\log(\cos 2\,x^3)\;&=\;\log\left[1\,-\,2\,x^6\,+\,o(x^6)\right]\;=\;-\,2\,x^6\,+\,o(x^6)\,+\,o(-2x^6+o(x^6))\;=\\&=\;-2\,x^6\,+\,o(x^6)\,+\,o(x^6)\;=\;-2\,x^6\,+\,o(x^6)\end{aligned}$$

Mentre dallo sviluppo di *sin* si ha:

$$\begin{aligned}[\sin x^2]^3\;&=\;[x^2\,+\,o(x^2)]^3\;=\;x^6+3x^4\,o(x^2)+3x^2[o(x^2)]^2+[o(x^2)]^3=\\&=x^6\,+o(x^6)+o(x^6)+o(x^6)=x^6+o(x^6)\end{aligned}$$

Sostituendo nel limite ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi sui ha infine:

$$\lim_{x\to 0+}\;\frac{-2\,x^6\,+\,o(x^6)}{x^6\,+\,o(x^6)}=\lim_{x\to 0+}\;\frac{-2\,x^6}{x^6}\;=\;-2.$$

Esercizio 3. (Punti 8)

Determinare al variare di $x\in\mathbb{R}$ il valore dei seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\;\frac{n^2\,\log(1+n^x)}{\sqrt[n]{(2n)^n\,-\,n^n}};$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\;(n+1)!\;(e^{n^x}\,-\,1)\;\log\left(1\,+\,\sin\,\frac{1}{n!}\right).$

Svolgimento (a)

$$\lim_{n\to+\infty}\;\frac{n^2\,\log(1+n^x)}{\sqrt[n]{(2n)^n\,-\,n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\;\frac{n^2\,\log(1+n^x)}{n\,\sqrt[n]{(2)^n\,-\,1}}=\lim_{n\to+\infty}\;\frac{n\,\log(1+n^x)}{\sqrt[n]{(2)^n\,-\,1}}=\lim_{n\to+\infty}\;\frac{n\,\log(1+n^x)}{2\,\sqrt[n]{1\,-\,\frac{1}{2^n}}};$$

Sia ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{2^n}} = 1,$$

perché per ogni $n \geq 1$ risulta: $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{1 - \frac{1}{2^n}} < 1$. Onde

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \log(1+n^x)}{\sqrt[n]{(2n)^n - n^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} n \log(1+n^x)$$

Se $x \geq 0$ il valore del limite proposto è $+\infty$. Se $x < 0$ la funzione *log* si può sviluppare come segue:

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^{|x|}}\right) = \frac{1}{n^{|x|}} + o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)$$

Sostituendo nel limite ed utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \log(1+n^x)}{\sqrt[n]{(2n)^n - n^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{|x|}} + o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{|x|}} + o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} n^{1-|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = -1 \\ 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ +\infty & \text{se} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

Svolgimento (b)
Dallo sviluppo della funzione *sin* otteniamo:

$$\sin\left(1 + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right).$$

Sostituendo nella funzione *log*

$$\log\left(1 + \sin\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right) + o\left[\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)\right] = \frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right).$$

Osserviamo inoltre che

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)! \left[\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n!} + o\left(\frac{1}{n!}\right)}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)$$

Tornando al limite proposto si ha dunque

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)!\,(e^{n^x} - 1) \log\left(1 + \sin\frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\,(e^{n^x} - 1) = +\infty, \qquad \text{se} \qquad x \geq 0.$$

Sia $x < 0$.
Dallo sviluppo della funzione esponenziale:

$$e^{n^x} = 1 + \frac{1}{n^{|x|}} + o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right),$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)!\,(e^{n^x} - 1) \log\left(1 + \sin\frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to+\infty} (n+1) \left[\frac{1}{n^{|x|}} + o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1) \frac{1}{n^{|x|}} = \lim_{n\to+\infty} n^{1-|x|} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ 1 & \text{se} \quad x = -1 \\ +\infty & \text{se} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.(Punti 9)
Sia f una funzione continua definita sull'intervallo $[0,1]$ a valori nell'intervallo $[a,b]$, con $0 < a < b < 1$, sia inoltre

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^n - f(x) = 0\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(a) Dimostrare che $A_n \neq \emptyset$.

(b) Dimostrare che A_n ammette massimo.

(c) Posto $m_n = \max A_n$, si calcoli il valore del limite: $\lim_{n\to+\infty} f(m_n)$.

Svolgimento

(a) Affermare che $A_n \neq \emptyset$ equivale a dire che l'equazione $f(x) = x^n$ ammette almeno una soluzione, ovvero che la funzione $g(x) = f(x) - x^n$ ha almeno un zero. A tale scopo osserviamo che: g è continua sull'intervallo $[0,1]$, inoltre $g(0) = f(0) \geq a > 0$, mentre $g(1) = f(1) - 1 \leq b - 1 < 0$. Come conseguenza del *teorema degli zeri* esiste un punto $\xi_n \in (0,1)$ tale che $g(\xi_n) = 0$, ovvero $f(\xi_n) = \xi_n^n$.

(b) L'insieme A_n è contenuto nell'intervallo $[0,1]$, quindi è limitato, onde $\sup A_n = m_n \in \mathbb{R}$. Se A_n è costituito da un numero finito di elementi allora si ha banalmente che $\sup A_n = \max A_n$, altrimenti sia $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di A_n tale che $\lim_{h\to+\infty} x_h = m_n$. [1] Per la continuità di f si ha

$$\lim_{h\to+\infty} f(x_h) = f(m_n)$$

Mentre

$$\lim_{h\to+\infty} x_h^n = m_n^n$$

Da cui $f(m_n) = m_n^n$, ovvero $m_n \in A_n$.

(c) L'equazione $f(m_n) = m_n^n$ è equivalente alla $\sqrt[n]{f(m_n)} = m_n$. Per ipotesi $0 < a \leq f(m_n) \leq b$, onde $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{f(m_n)} \leq \sqrt[n]{b}$. Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{f(m_n)} = 1$$

per la continuità di f, otteniamo infine

$$\lim_{n\to+\infty} f(m_n) = f(1).$$

[1] Dalla definizone di *sup* sappiamo infatti che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $x^* \in A_n$ tale che $m_n - \varepsilon < x^*$. Prendendo $\varepsilon = \dfrac{1}{h}$, $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che esiste $x_h \in A_n$ tale che $m_n - \frac{1}{h} < x_h < m_n$, da cui $\lim_{h\to+\infty} x_h = m_n$.