ANALISI MATEMATICA I-A

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta del 7/1/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (Punti 6)

Determinare le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overline{w}\, z \;+\; 1 - i\sqrt{3} &= 0 \\ z^3\,|z^2| \;-\; \overline{z}^{\,2}\, w &= 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. (Punti 6)

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 &= \beta, \quad \beta > 0, \\ a_{n+1} &= a_n \, \log\,(2 + a_n)\,, \end{cases}$$

studiarne l'andamento e calcolare l'eventuale limite al variare del parametro $\beta > 0$.

Esercizio 3. (Punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin\left(\sqrt{4+x^3} - 2\right) + x^5}{\sqrt[3]{1+x^4} - \sqrt[4]{1+x^4} + x^6}.$$

Esercizio 4. (Punti 6)

Determinare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^x} - 1 + \frac{1}{n!}}{e^{n^x} - 1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Esercizio 5. (Punti 6)

Si consideri l'equazione:

$$x^n = \cos x,$$

(a) dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ammette soluzione sull'intervallo $[0, 1]$;

(b) dimostrare l'unicità della soluzione;

(c) detta x_n tale soluzione calcolare il valore del limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. (Punti 6)

Determinare le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overline{w}\, z \;+\; 1 \;-\; i\sqrt{3} \;=\; 0 \\[2mm] z^3\,|z^2| \;-\; \overline{z}^{\,2}\, w \;=\; 0. \end{cases}$$

Svolgimento.
Il sistema dato equivale ai seguenti:

$$\begin{cases} \overline{w}\, z \;=\; -1 + i\sqrt{3} \\[2mm] z^3\,|z|^2 \;-\; \overline{z}^{\,2}\, w \;=\; 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{\overline{w}\, z} \;=\; \overline{-1 + i\sqrt{3}} \;=\; -1 - i\sqrt{3} \\[2mm] z^3\, z\,\overline{z} \;-\; \overline{z}\,\overline{z}\, w \;=\; 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} w\,\overline{z} \;=\; -1 - i\sqrt{3} \\[2mm] z^4\,\overline{z} \;-\; \overline{z}\,(-1 - \sqrt{3}) \;=\; 0 \end{cases}$$

Poiché $z = 0$ non può essere soluzione della prima equazione, possiamo dividere la seconda per $\overline{z}$ ottenendo

$$z^4 \;=\; -1 \;-\; \sqrt{3}.$$

Questa viene risolta calcolando le radici quarte nel campo complesso del secondo membro. A tale scopo scriviamo questo numero in forma trigonometrica nel modo seguente:

$$-1 \;-\; \sqrt{3} \;=\; 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi \;+\; i\,\sin\frac{4}{3}\pi\right).$$

Le radici quarte sono quindi

$$\sqrt[4]{-1 \;-\; \sqrt{3}} \;=\; \sqrt[4]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right) \;+\; i\,\sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right),\; k = 0, 1, 2, 3\right\}.$$

Le soluzioni z sono:
$z_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $\quad z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3} + i)$, $\quad z_2 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1 - i\sqrt{3})$, $\quad z_3 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$.
Da cui
$\overline{z_0} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$, $\quad \overline{z_1} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3} - i)$, $\quad \overline{z_2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\quad \overline{z_3} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$. Dalla prima equazione del terzo sistema otteniamo w :

$$w_0 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\frac{-1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left[\frac{\cos\frac{4}{3}\pi \;+\; i\,\sin\frac{4}{3}\pi}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \;+\; i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left(\cos\frac{5}{3}\pi \;+\; i\,\sin\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left(\frac{1}{2} \;-\; i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$w_1 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\frac{-1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left[\frac{\cos\frac{4}{3}\pi \;+\; i\,\sin\frac{4}{3}\pi}{\cos\frac{7}{6}\pi \;+\; i\,\sin\frac{7}{6}\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left[\cos\frac{\pi}{6} \;+\; i\,\sin\frac{\pi}{6}\right] = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \;+\; i\,\frac{1}{2}\right)\;;$$

$$w_2 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\frac{-1 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left(\frac{\cos\frac{4}{3}\pi \;+\; i\,\sin\frac{4}{3}\pi}{\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) \;+\; i\,\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left(\cos\frac{8}{3}\pi \;+\; i\,\sin\frac{8}{3}\pi\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\;\left(-\frac{1}{2} \;+\; i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$w_3 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \left(\frac{\cos\frac{4}{3}\pi \ + \ i \ \sin\frac{4}{3}\pi}{\cos\frac{\pi}{6} \ + \ i \ \sin\frac{\pi}{6}} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \left(\cos\frac{7}{6}\pi \ + \ i \ \sin\frac{7}{6}\pi \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \ - \ i \, \frac{1}{2} \right);$$

In definitiva le soluzioni sono date dalle coppie:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1+i\sqrt{3}), \ \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \left(\frac{1}{2} \ - \ i \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right); \ \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3}+i), \ \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ + \ i \, \frac{1}{2} \right) \right);$$

$$\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3}), \ \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \left(-\frac{1}{2} \ + \ i \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right); \ \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}-i), \ \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \ \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \ - \ i \, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Esercizio 2. (Punti 6)

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 & = \quad \beta, \quad \beta > 0, \\ a_{n+1} & = \quad a_n \ \log\left(2 \ + \ a_n\right) \ , \end{cases}$$

studiarne l'andamento e calcolare l'eventuale limite al variare del parametro $\beta > 0$.

Svolgimento.
Osserviamo che la successione è ben definita in quanto, essendo $\beta > 0$ risulta $a_1 > 0$ perché $\log(2+\beta) > 1$. Analogamente procedendo per induzione si ha che da $a_n > 0$ segue $a_{n+1} > 0$.
Risulta anche che

$$a_0 > a_1 \iff \beta > \beta \log(2+\beta) \iff 1 > \log(2+\beta) \iff e > 2+\beta \iff e-2 > \beta.$$

Come pure

$$a_0 < a_1 \iff \beta < \beta \log(2+\beta) \iff 1 < \log(2+\beta) \iff e < 2+\beta \iff e-2 < \beta.$$

In particolare, se $\beta = e-2$ allora $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots a_n$, la successione è $a_n = e-2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, che sarà quindi anche il suo limite.
Osserviamo anche che la funzione $f(x) = x\log(2+x)$ è strettamente crescente per $x > 0$, infatti, per ogni $x_1, x_2 > 0$ si ha:

$$x_1 < x_2 \iff \log(2+x_1) < \log(2+x_2) \iff x_1\log(2+x_1) < x_1\log(2+x_2) < x_2\log(2+x_2).$$

(Nell'ultimo passaggio si osservi che $\log(2+x_2) > 0$, perché $2+x_2 > 1$).
Da questa osservazione segue che se $\beta < 2-e$ allora $a_{n+1} < a_n$ implica $a_{n+2} = f(a_{n+1}) < f(a_n) = a_{n+1}$. Mentre avevavamo osservato che $a_0 > a_1$. Per il principio di induzione si ha che la successione è decrescente, ed essendo positiva è ammette limite reale l, che si calcola risolvendo l'equazione:

$$l = l \ \ \log(2+l),$$

le cui soluzioni sono $l = 0$ e $l = e-2$. Vista la natura della successione il limite è $l = 0$ ($l = e-2$ si esclude perché maggiore di a_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ e a_n è decrescente.)
In maniera analoga: se $\beta > e-2$ allora $a_0 > a_1$ e $a_{n+1} > a_n$ implica $a_{n+2} = f(a_{n+1}) > f(a_n) = a_{n+1}$. Per il principio di induzione a_n è crescente. Ammette dunque limite per il teorema di regolarità delle succesioni monotone, ma essendo $a_n > e-2$, per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, nessuno dei due valori sopra determinati di l può essere il limite della successione, allora: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \ = +\infty$.

Esercizio 3. (Punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin\left(\sqrt{4+x^3}\ -\ 2\right)\ +\ x^5}{\sqrt[3]{1+x^4}\ -\ \sqrt[4]{1+x^4}\ +\ x^6}.$$

Svolgimento.
Consideriamo gli sviluppi delle funzioni che compaiono al numeratore:

$$\sqrt{4+x^3} = 2\sqrt{1+\frac{x^3}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{4}\ +o(x^3)\right) = 2+\frac{x^3}{4}+o(x^3).$$

$$\sin\left(2+\frac{x^3}{4}+o(x^3)-2\right)\ =\ \frac{x^3}{4}+o(x^3)+o\left(\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right) = \frac{x^3}{4}+o(x^3).$$

Al denominatore si ha invece:

$$\sqrt[3]{1+x^4} = 1+\frac{1}{3}x^4+o(x^4); \qquad \sqrt[4]{1+x^4} = 1+\frac{1}{4}x^4+o(x^4).$$

Quindi

$$\sqrt[3]{1+x^4}\ -\ \sqrt[4]{1+x^4} = 1+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-1-\frac{1}{4}x^4+o(x^4) = \frac{1}{12}x^4+o(x^4).$$

Sostituendo nel limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^3}{4}+o(x^3)+x^5}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)+x^6}\ =\ \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^3}{4}+o(x^3)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}\ =\ \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^3}{4}}{\frac{x^4}{12}} = 3\ \lim_{x\to 0+}\ \frac{1}{x}\ =\ +\infty.$$

Esercizio 4. (Punti 6)

Determinare al variare di $x\in\mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^x}\ -\ 1\ +\ \frac{1}{n!}}{e^{n^x}\ -\ 1\ +\ \frac{1}{n^2}}.$$

Svolgimento.
Se $x=0$ il limite proposto diventa:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^x}\ -1\ +\ \frac{1}{n!}}{e^{n^x}\ -\ 1\ +\ \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^1-1\ +\ \frac{1}{n!}}{e\ -\ 1\ +\ \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{e-1}.$$

Sia ora $x>0$, osservato che
$\lim_{n\to+\infty} 5^{n^x} = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} e^{n^x} = +\infty$,
al numeratore ed al denominatore della funzione mettiamo in evidenza i termini 5^{n^x} e e^{n^x} ottenendo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^x}\ -\ 1\ +\ \frac{1}{n!}}{e^{n^x}\ -\ 1\ +\ \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^x}\left(1-\frac{1}{5^{n^x}}\ +\ \frac{1}{5^{n^x}n!}\right)}{e^{n^x}\left(1\ -\ \frac{1}{e^{n^x}}\ +\ \frac{1}{e^{n^x}n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n^x}}{e^{n^x}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{e}\right)^{n^x} = +\infty.$$

Sia ora $x<0$, di conseguenza $x=-|x|$ e quindi $5^{n^x} = 5^{\frac{1}{n^{|x|}}}$, $e^{n^x} = e^{\frac{1}{n^{|x|}}}$. Per n che tende ad infinito l'argomento dell'esponenziale tende a zero, possiamo allora applicare gli sviluppi delle funzioni esponenziali nell'intorno di zero.

$$5^{\frac{1}{n^{|x|}}} = 1+\frac{1}{n^{|x|}}\ \log 5+o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right); \qquad e^{\frac{1}{n^{|x|}}} = 1+\frac{1}{n^{|x|}}\ +o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n^{|x|}}\ \log 5+o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)\,-\,1\,+\,\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{n^{|x|}}\ +o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)\,-\,1\,+\,\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}\ \log 5+o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)+\,\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n^{|x|}}\ +o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)\,+\,\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}\ \log 5+o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)}{\frac{1}{n^{|x|}}\ +o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)\,+\,\frac{1}{n^2}}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo raccolto il termine $\dfrac{1}{n!}$ nell'o-piccolo, perché per qualunque valore di $x<0$, risulta infinitesimo di ordine superiore a $\dfrac{1}{n^{|x|}}$ essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n^{|x|}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{|x|}}{n!}=0$$

Al denominatore dobbiamo invece distinguere vari casi. Sia $-2<x<0$, quindi $|x|<2$. In questo caso risulta che $\dfrac{1}{n^2}$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\dfrac{1}{n^{|x|}}$ e può quindi essere raccolto nell'o-piccolo. Il limite diventa:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}\ \log 5+o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)}{\frac{1}{n^{|x|}}\ +o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}\ \log 5}{\frac{1}{n^{|x|}}}=\log 5$$

Sia $x=-2$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\ \log 5+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}\ +o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,+\,\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\ \log 5}{\frac{2}{n^2}}=\frac{\log 5}{2}$$

Se invece $x<-2$, il termine $\dfrac{1}{n^{|x|}}+o\left(\dfrac{1}{n^{|}x|}\right)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\dfrac{1}{n^2}$, infatti, essendo $|x|>2$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}\ +o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^{|x|}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{|x|-2}}=0.$$

In definitiva:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}\ \log 5+o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)}{\frac{1}{n^{|x|}}\ +o\left(\frac{1}{n^{|x|}}\right)\,+\,\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{|x|}}\log 5}{\frac{1}{n^2}}=\log 5\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^{|x|}}=\log 5\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{|x|-2}}=0.$$

Esercizio 5. (Punti 6)

Si consideri l'equazione:

$$x^n\ =\ \cos\,x,$$

(a) dimostrare che per ogni $n\in\mathbb{N}$ ammette soluzione sull'intervallo $[0,1]$;

(b) dimostrare l'unicità della soluzione;

(c) detta x_n tale soluzione calcolare il valore del limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ x_n$.

Svolgimento.
(a) L'equazione data equivale alla seguente

$$x^n\ -\ \cos\,x\ =\ 0.$$

Risolvere è equivalente a determinare gli zeri della funzione:

$$f_n(x)=x^n-\cos x.$$

Osserviamo che f_n risulta continua perché differenza di funzioni continue. Inoltre se $n \geq 1$

$$f_n(0) = -1, \;\; f_n(1) = 1 - \cos 1 > 0.$$

Quindi per il teorema degli zeri $f_n(x) = 0$ ammette una radice nell'intervallo $(0, 1)$.
Se $n = 0$, ovviamente, l'unica soluzione è $x = 0$.

(b) L'unicità segue dalla stretta monotonia della funzione f_n.
Infatti f_n risulta strettamente crescente, perché, presi x' e x'' nell'intervallo [0,1], con $x' < x''$, si ha
$(x')^n < (x'')^n$ e $\cos x' > \cos x''$ ovvero $-\cos x' < -\cos x''$
e quindi
$(x')^n - \cos x' < (x'')^n - \cos x''$.

(c) Se $n \geq 1$, dall'equazione ricaviamo:

$$x_n \;=\; \sqrt[n]{\cos x_n}$$

Tenuto conto che $x_n \in (0, 1)$, al secondo membro il termine sotto radice viene limitato nel modo seguente:

$$\cos 1 < \cos x_n < 1$$

da cui

$$\sqrt[n]{\cos 1} < \sqrt[n]{\cos x_n} < 1$$

e quindi, essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\cos 1} = 1$, per il teorema dei carabinieri, risulta $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\cos x_n} = 1$, onde, in definitiva:
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.