ANALISI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta intermedia del 10/11/2008

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1.

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ \\ a_{n+1} & = & \dfrac{2+a_n^2}{1+a_n}\,. \end{cases}$$

Dimostrare che:

(a) per ogni $n \in \mathbb{N} : a_n < 2$,

(b) $n \to a_n$ è crescente.

Esercizio 2.

Dimostrare che, per ogni $x \neq 1$, $x \in R^+$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, vale la diseguaglianza seguente:

$$\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}-1} > \frac{1}{n(x^2-1)}\,.$$

Esercizio 3.

Determinare le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \overline{z}^{\,2} \; - \; w^2 & = & -1 \\ \\ \overline{w}^{\,2} \; - \; z & = & 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.

Dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ \frac{n+4}{2n^2-n+1}\ (1+\sin n),\ \ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ (-1)^n\ \frac{n^3+2n-1}{n^2+1},\ \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

dimostrare mediante la definizione di inf e sup che:

$$\inf_{\mathbb{N}} A \,=\, 0, \qquad \sup_{\mathbb{N}} B \,=\, +\infty.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ & & \\ a_{n+1} & = & \dfrac{2+a_n^2}{1+a_n}. \end{cases}$$

Dimostrare che:

(a) per ogni $n \in \mathbb{N} : a_n < 2$,

(b) $n \to a_n$ è crescente.

Svolgimento.

Osserviamo innanzitutto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n > 0$. Infatti: $a_0 > 0$ ed inoltre da $a_n > 0$ segue $a_{n+1} > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proviamo (a) per induzione. Per $n = 0$ è ovvio. Dimostriamo l'induttività della proposizione, ovvero per ogni $n \in \mathbb{N} : a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$.

Infatti $a_{n+1} < 2$ equivale a $\dfrac{2+a_n^2}{1+a_n} < 2$ ovvero $2 + a_n^2 < 2 + 2a_n$, che risulta equivalente all'ipotesi induttiva.

Proviamo (b). Basta dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$ Infatti $a_n < \dfrac{2+a_n^2}{1+a_n}$ equivale a $a_n + a_n^2 < 2 + a_n^2$, cioé $a_n < 2$, che è vera per (a).

Esercizio 2.

Dimostrare che, per ogni $x \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, vale la diseguaglianza seguente:

$$\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}-1} > \frac{1}{n(x^2-1)}.$$

Svolgimento.

La diseguaglianza può essere scritta nella forma equivalente:

$$n\ x^{2n-1} > \frac{x^{2n}\ -1}{x^2\ -1}, \text{ se } x > 1,$$

$$n\ x^{2n-1} < \frac{x^{2n}\ -1}{x^2\ -1}, \text{ se } x < 1,$$

Ricordando la formula della somma dei primi n termini di una progressione geometrica, in questo caso di ragione x^2, otteniamo

$$n\ x^{2n-1} > \sum_{h=0}^{n-1} x^{2h} \text{ se } x > 1,$$

$$n\ x^{2n-1} < \sum_{h=0}^{n-1} x^{2h} \text{ se } x < 1,$$

Procediamo per induzione. Per $n = 1$ è ovvio. Per quanto riguarda l'induttività della proposizione, nel caso $x > 1$, si ha

$$\sum_{h=0}^{n} x^{2h} = x^{2n} + \sum_{h=0}^{n-1} x^{2h} \leq \quad \text{(per l'ipotesi induttiva)} \quad \leq x^{2n} + nx^{2n-1} \leq$$

$$\leq x^{2n}\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq x^{2n}(1+n) \leq x^{2n+1}\frac{n+1}{x} \leq x^{2n+1}(n+1).$$

Dimostrazione analoga per $x < 1$.

Esercizio 3.

Determinare le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \overline{z}^{\,2} - w^2 = -1 \\ \overline{w}^{\,2} - z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento.

Il sistema dato equivale al seguente

$$\begin{cases} \overline{z}^{\,2} - w^2 = -1 \\ z = \overline{w}^{\,2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} w^4 - w^2 + 1 = 0 \\ \overline{z} = w^2 \end{cases} .$$

La prima equazione del sistema è un'equazione *biquadratica* che si risolve ponendo $u = w^2$, e quindi $u^2 - u + 1 = 0$, che ha soluzioni

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i.$$

Determiniamo le soluzioni dell'equazione $u = w^2$ calcolando le radici quadrate di $u_{1,2}$. A tale scopo passiamo alla forma trigonometrica:

$$u_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \cos\frac{5}{3}\pi + i \sin\frac{5}{3}\pi$$

Applicando a questi numeri la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso, otteniamo rispettivamente

$$\begin{cases} w_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \\ w_2 = \cos\frac{7}{6}\pi + i \sin\frac{7}{6}\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w_3 = \cos\frac{5}{6}\pi + i \sin\frac{5}{6}\pi \\ w_4 = \cos\frac{11}{6}\pi + i \sin\frac{11}{6}\pi \end{cases} .$$

Da cui, mediante la formula di De Moivre:

$$\begin{cases} z_1 = \overline{w_1}^2 = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3} \\ z_2 = \overline{w_2}^2 = \cos\frac{7}{3}\pi - i \sin\frac{7}{3}\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z_3 = \overline{w_3}^2 = \cos\frac{5}{3}\pi - i \sin\frac{5}{3}\pi \\ z_4 = \overline{w_4}^2 = \cos\frac{11}{3}\pi - i \sin\frac{11}{3}\pi \end{cases} .$$

In definitiva le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{aligned}
(z_1; w_1) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i;\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right), \\
(z_2; w_2) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right), \\
(z_3; w_3) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right), \\
(z_4; w_4) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i;\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 4.

Dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$A = \left\{\frac{n+4}{2n^2 - n + 1}\,(1 + \sin n),\ \ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \left\{(-1)^n\,\frac{n^3 + 2n - 1}{n^2 + 1},\ \ n \in \mathbb{N}\right\},$$

dimostrare mdiante la definizione di inf e sup che:

$$\inf_{\mathbb{N}} A \,=\, 0, \qquad \sup_{\mathbb{N}} B \,=\, +\infty.$$

Svolgimento.

Consideriamo l'insieme A. Applichiamo la caratterizzazione dell'estremo inferiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. È evidente che 0 è un minorante di A in quanto tutti gli elementi dell'insieme risultano positivi. Verifichiamo che 0 è il massimo dei minoranti mediante la proposizione

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_h \in A \text{ tale che } x_h < \varepsilon,\ \text{ovvero } \frac{h+4}{2h^2 - h + 1}\,(1 + \sin h) \,<\, \varepsilon$$

Poiché, per ogni $h \in \mathbb{N}$, risulta $1 + \sin h < 2$ e $h^2 < 2h^2 - h + 1$ si ha

$$\frac{h+4}{2h^2 - h + 1}\,(1 + \sin h) \,<\, \frac{5h}{h^2}\,2 = \frac{10}{h} \,<\, \varepsilon$$

per $h > 1$ e $h > \dfrac{10}{\varepsilon}$.

Consideriamo l'insieme B. Dimostrare che $\sup_{\mathbb{N}} B \,=\, +\infty$ eqivale a dimostrare che B non è limitato superiormente, ovvero

$$\forall M > 0 \exists x_h \in B \text{ tale che } x_h > M,$$

ovvero

$$\forall M > 0 \exists x_h \in B \text{ tale che } (-1)^h\,\frac{h^3 + 2h - 1}{h^2 + 1} > M$$

Ovviamente si tratta di determinare un valore di h pari che verifica la maggiorazione sopra. A tale scopo basta osservare che per ogni $h > 1$ risulta $h^3 + 2h - 1 > h^3 + h$ e quindi si ha

$$\frac{h^3 + 2h - 1}{h^2 + 1} > \frac{h^3 + h}{h^2 + 1} > h$$

La tesi è verificata per qualsiasi valore pari di h maggiore di M.