ANALISI MATEMATICA II

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova scritta intermedia del 3/4/2009

TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE

Esercizio 1. (punti 8)

Calcolare il valore dei seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,(\tan^2 x + 3)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x^2+6x+10)\,(x+3)\,dx$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx$.

Esercizio 2. (punti 6)

Sia data $f \in C^2([0,1])$ con $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

(a) Se $f(1) = f'(1) = 0$, calcolare $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(x)\,dx$.

(b) Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan f(x)}{1+[f(x)]^2}\,f'(x)\,dx$.

Esercizio 3. (punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite mediante la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x - e^{\frac{x^4}{3}}}{\log(1 + 2x^2) - 2\,(x^2 - x^4)}.$$

Esercizio 4. (punti 8)

Data la funzione: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x} - \log\dfrac{x-1}{x+1}$,

(a) determinare il campo di esistenza, i limiti agli estremi del campo di esistenza ed eventuali asintoti obliqui;

(b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo.

(c) determinare gli intervalli dove risulta concava, convessa e gli eventuali punti di flesso;

(d) tracciare un grafico approssimato.

Esercizio 5. (punti 5)

Determinare i valori del parametro $a > 0$ per i quali l'equazione

$$a\,x^4 + 4\,x^3\sqrt{a} + 4\,x^2 - 1 = 0$$

ammette quattro soluzioni reali e distinte.

Esercizio 1. (punti 8)

Calcolare il valore dei seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\ (\tan^2 x + 3)\ dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x^2+6x+10)\ (x+3)\, dx$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\ dx$.

SVOLGIMENTO

(a)

Determiniamo l'insieme delle primitive della funzione integranda, calcolando l'integrale indefinito

$$\int \sin x\ (\tan^2 x + 3)\ dx = \int \sin x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\right) dx = \int \sin x \left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} + 3\right) dx =$$

$$= \int \sin x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\right) dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + 2 \int \sin x\ dx$$

Osserviamo che, effettuando il cambiamento di variabile $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$, il primo integrale diventa

$$\int -\frac{1}{t^2}\ dt = \frac{1}{t} + C, \quad C \in \mathbb{R};$$

mentre per il secondo si ha banalmente $\displaystyle\int 2\sin x\, dx = 2\int \sin x\, dx = -2\cos x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Tornando all'integrale proposto

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\ (\tan^2 x + 3)\ dx = \left[\frac{1}{\cos x} - 2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 2 = 1.$$

(b)

$$\int_0^1 \arctan(x^2+6x+10)\ (x+3)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan(x^2+6x+10)\ (2x+6)\, dx,$$

effettuando il cambiamento di variabile $t = x^2+6x+10$, $dt = (2x+6)dx$, ove si tiene presente che gli estremi si trasformano: per $x=0$ si ha $t=10$, per $x=1$ si ha $t=17$. Sostituendo ed integrando per parti

$$\frac{1}{2}\int_{10}^{17} \arctan t\, dt = \frac{1}{2}\left[t\ \arctan t\right]_{10}^{17} - \frac{1}{2}\int_{10}^{17} \frac{t}{1+t^2} = \frac{17}{2}\arctan 17 - 5\ \arctan 10 - \frac{1}{4}\int_{10}^{17} \frac{2t}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \frac{17}{2}\arctan 17 - 5\ \arctan 10 - \frac{1}{4}\ \left[\log(1+t^2)\right]_{10}^{17} = \frac{17}{2}\arctan 17 - 5\ \arctan 10 - \frac{1}{4}\ \log 290 + \frac{1}{4}\log 101.$$

(c)

Scomponiamo il numeratore della frazione dividendolo per il denominatore mediante il seguente algoritmo:

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
x^4 & & & x & +1 & x^2 & -3x & +2 \\ \cline{6-8}
-x^4 & +3x^3 & -2x^2 & & & x^2 & +3x & +7 \\ \cline{1-3}
0 & 3x^3 & -2x^2 & +x & +1 & & & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & -6x & & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & 7x^2 & -5x & +1 & & & \\
 & & -7x^2 & +21x & -14 & & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 16x & -13 & & &
\end{array}$$

Da cui deduciamo che
$$\frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} = x^2 + 3x + 7 + \frac{16x - 13}{x^2 - 3x + 2}.$$
Osserviamo che le radici del denominatore sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ e quindi $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Dobbiamo determinare due numeri reali A, B tali che

$$\frac{16x - 13}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x + (-A-2B)}{(x-2)(x-1)}.$$

Le eguaglianze sono verificate per ogni valore di $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ se i numeratori delle frazioni sono uguali, ovvero se sono uguali i coefficienti dei termini di egual grado:

$$\begin{cases} A + B & = & 16 \\ -A - 2B & = & -13 \end{cases} \iff \begin{cases} A & = & 19 \\ B & = & -3 \end{cases}$$

Si poteva procedere anche più rapidamente osservando che dovendo verificarsi l'eguaglianza tra le frazioni per ogni valore di $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ bastava verificare l'eguaglianza tra i numeratori per ogni $x \in \mathbb{R}$ (per la continuità dei polinomi). Quindi dovendo essere $16\,x - 13 = A(x-1) + B(x-2)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, sarà verificata in particolare per $x = 1$, sostituendo: $16 - 13 = -B$, per $x = 2$, $19 = A$. Tornando all'integrale di partenza e sostituendo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 3x + 7 + \frac{16x - 13}{x^2 - 3x + 2} \right) dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 3x + 7 + \frac{19}{x-2} - \frac{3}{x-1} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 3x\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 7\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{19}{x-2}\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{x-1} =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7x + 19\,\log|x-2| - 3\,\log|x-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{47}{12} + 19\log 3 - 35\,\log 2.$$

Esercizio 2. (punti 6)

Sia data $f \in C^2([0,1])$ con $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 1$.

(a) Se $f(1) = f'(1) = 0$, calcolare $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx$.

(b) Sapendo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan f(x)}{1 + [f(x)]^2}\, f'(x)\, dx$.

SVOLGIMENTO

(a)
Risolviamo integrando per parti ([1]) prendendo $g(x) = x^2$ e $h'(x) = f''(x)$, quindi $g'(x) = 2x$ e $h(x) = f'(x)$

[1] $\displaystyle\int_a^b g(x)\, h'(x)\, dx = [g(x)\, h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)\, h(x)\, dx.$

$$\int_0^1 x^2 f''(x)\ dx \;=\; \left[x^2\, f'(x)\right]_0^1 - \int_0^1 2xf'(x)\ dx \;=$$

(tenuto conto dell'ipotesi $f'(1) = 0$)

$$= 1^2\, f'(1) - 0^2 f'(0) \;-\; \int_0^1 2xf'(x)\ dx \;=\; -\int_0^1 2xf'(x)\ dx \;=$$

(integrando di nuovo per parti, questa volta con $g(x) = 2x$, $h'(x) = f'(x)$, $g'(x) = 2$, $h(x) = f(x)$, e tenendo conto dell'ipotesi $f(1) = 0$)

$$= -\ [2x\, f(x)]_0^1 \;+\; \int_0^1 2\, f(x)\ dx \;=\; -2\, f(1) + \,2\cdot 0\, f(0) \;+\; 2\int_0^1 f(x)\ dx \;=\; 2\,,$$

perché, per ipotesi, $\int_0^1\ f(x)\ dx \;=\; 1$.

(b)

Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile $t = f(x)$, quindi $dt = f'(x)dx$, inoltre per $x = 0$, $t = f(0) = 0$, mentre per $x = 1$, $t = f(1) = 1$ (per ipotesi), quindi

$$\int_0^1 \frac{\arctan f(x)}{1+[f(x)]^2}\ f'(x)\ \ dx \;=\; \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\, dt\,.$$

Cambiamo nuovamente variabile ponendo $s = \arctan t$, da cui $ds = \frac{1}{1+t^2}\, dt$, ed osservando che per $t = 0$ risulta $s = 0$, mentre per $t = 1$, $s = \frac{\pi}{4}$. Possiamo di coseguenza scrivere

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\, dt \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} s\ ds \;=\; \left[\frac{1}{2}\, s^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \;=\; \frac{\pi^2}{32}.$$

Esercizio 3. (punti 6)

Calcolare il valore del seguente limite mediante la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x \;-\; e^{\frac{x^4}{3}}}{\log(1\;+\;2x^2)\;-\;2\,(x^2\;-\;x^4)}.$$

SVOLGIMENTO.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione del limite.
$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}\, x^2 \;+\; \dfrac{1}{24}\, x^4 \;+\; o(x^4)$
da cui, elevando al quadrato:
$\cos^2 x \;=\; 1 + \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{24^2}x^8 + o(x^8) - x^2 + \dfrac{1}{12}x^4 + o(x^4) - x^2 o(x^4) - \dfrac{1}{24}x^6 + o(x^8) = 1 - x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$
$e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t = \dfrac{x^4}{3}$ otteniamo,
$e^{\frac{x^4}{3}} = 1 + \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{1}{18}x^8 + o(x^8)$
Da cui
$\cos^2 x \;-\; e^{\frac{x^4}{3}} \;=\; 1 - x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4) - 1 - \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{1}{18}x^8 + o(x^8) = -x^2 + o(x^2)$
perché i termini con x^4, x^8, $o(x^4)$ e $o(x^8)$ sono tutti $o(x^2)$.
Osserviamo inoltre che da
$\log(1+t) = t - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, posto $t = 2x^2$, segue

$\log(1+2x^2) = 2x^2 - 2x^4 + \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)$. Quindi
$\log(1+2x^2) - 2(x^2 - x^4) \ = \ 2x^2 - 2x^4 + \frac{8}{3}x^6 + o(x^6) - 2x^2 + 2x^4 = \frac{8}{3}x^6 + o(x^6)$.
Sostituendo le espresioni trovate nel limite proposto:

$$\lim_{x\to 0^+} \ \frac{\cos^2 x \ - \ e^{\frac{x^4}{3}}}{\log(1 \ + \ 2x^2) \ - \ 2\,(x^2 \ - \ x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \ \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{8}{3}x^6 + o(x^6)} = -\frac{3}{8} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^6} = -\frac{3}{8} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^4} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

Esercizio 4. (punti 8)

Data la funzione: $f(x) \ = \ \dfrac{x^2 \ - \ 3}{x} \ - \ \log \dfrac{x-1}{x+1}$,

(a) determinare il campo di esistenza, i limiti agli estremi del campo di esistenza ed eventuali asintoti obliqui;

(b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo.

(c) determinare gli intervalli dove risulta concava, convessa e gli eventuali punti di flesso;

(d) tracciare un grafico approssimato.

SVOLGIMENTO.
Il campo di esistenza della funzione si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 0, \end{cases}$$

che ha soluzioni $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Osserviamo che

$$\lim_{x\to 1^+} \ \frac{x^2 \ - \ 3}{x} \ - \ \log \frac{x-1}{x+1} \ = \ +\infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} \ \frac{x^2 \ - \ 3}{x} \ - \ \log \frac{x-1}{x+1} \ = \ -\infty,$$

mentre per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$ la funzione tende rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$. Vediamo se f ammette asintoti obliqui: $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \frac{x^2 \ - \ 3}{x} \ - \ \frac{1}{x} \log \frac{x-1}{x+1} \ = \ 1,$$

mentre

$$q = \lim_{x\to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to +\infty} \ \frac{x^2 \ - \ 3}{x} \ - \ \log \frac{x-1}{x+1} \ - \ x \ = 0.$$

Allo stesso risultato si arriva per x che tende a $-\infty$. Possiamo concludere che f ammette come asintoto obliquo la retta $y \ = \ x$.

Osserviamo che la funzione è dispari: $f(x) = -f(-x)$, di conseguenza il suo grafico dovrà essere simmetrico rispetto al punto (0,0). Infatti si ha

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{-x} \ - \ \log \frac{-x-1}{-x+1} = -\frac{x^2 - 3}{x} + \log \frac{-x+1}{-(x+1)} = -\left(\frac{x^2 - 3}{x} - \log \frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x).$$

Monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo.

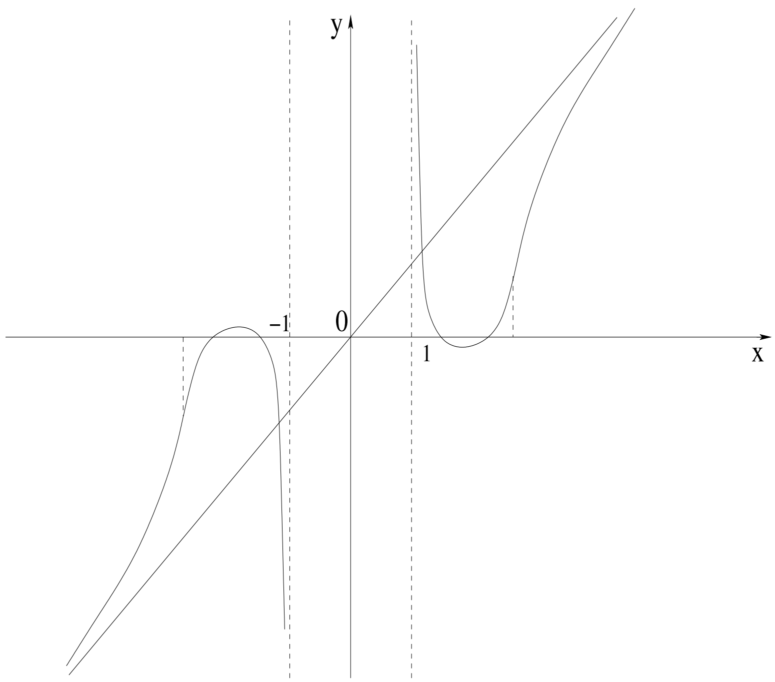
$$f'(x) \ = \ \frac{x^4 - 3}{x^4 - x^2}$$

Gli zeri di f' sono $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{3}$, mentre $f'(x) > 0$ per $x > \sqrt[4]{3}$ o $x < -\sqrt[4]{3}$, $f'(x) < 0$ per $1 < x < \sqrt[4]{3}$ o $-\sqrt[4]{3} < x < -1$, da cui f cè monotona crescente sugli intervalli $(-\infty, -\sqrt[4]{3})$ e $(\sqrt[4]{3}, +\infty)$, è invece monotona decrescente su $(-\sqrt[4]{3}, -1)$ e $(1, \sqrt[4]{3})$. Da questo deduciamo che $x_1 = -\sqrt[4]{3}$ è punto di massimo relativo, mentre $x_2 = \sqrt[4]{3}$ è punto di minimo relativo.

Concavità, convessità ed eventuali flessi.

$$f''(x) = \frac{2x\,(-x^4 + 6x^2 - 3)}{(x^4 - x^2)^2}.$$

Il segno di f'' è determinato dal numeratore della frazione. $f''(x) > 0$ per $1 < x < \sqrt{3+\sqrt{6}}$ e per $x < -\sqrt{3+\sqrt{6}}$, mentre $f''(x) < 0$ per $-\sqrt{3+\sqrt{6}} < x < -1$ e $x > \sqrt{3+\sqrt{6}}$. La funzione risulta quindi convessa su $(1, \sqrt{3+\sqrt{6}})$ e $(-\infty, -\sqrt{3+\sqrt{6}})$, concava su $(\sqrt{3+\sqrt{6}}, +\infty)$ e su $(-\sqrt{3+\sqrt{6}}, -1)$. Come conseguenza, punti $x = -\sqrt{3+\sqrt{6}}$ e $x = \sqrt{3+\sqrt{6}}$ sono di flesso per f.
Possiamo tracciare a questo punto un grafico approssimato della funzione.



Esercizio 5. (punti 5)

Determinare i valori del parametro $a > 0$ per i quali l'equazione

$$a\,x^4 + 4\,x^3\sqrt{a} + 4\,x^2 - 1 = 0$$

ammette quattro soluzioni reali e distinte.

SVOLGIMENTO.

I metodo.

Consideriamo le funzione $f(x) = ax^4 + 4x^3\sqrt{a} + 4x^2 - 1$. Risolvere l'equazione proposta equivale a determinare gli zeri di f. A tale scopo consideriamo la derivata prima
$f'(x) = 4ax^3 + 12x^2\sqrt{a} + 8x$, che si annulla nei punti
$x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{a}}$, $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ e $x_3 = 0$. Risulta
$f'(x) > 0$ per $x \in (x_1, x_2)$ e $x \in (x_3, +\infty)$,
$f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, x_1)$ e $x \in (x_2, x_3)$,

e quindi
f è crescente in $x \in (x_1, x_2)$ e $x \in (x_3, +\infty)$,
f è decrescente in $x \in (-\infty, x_1)$ e $x \in (x_2, x_3)$.
Da queste considerazioni deduciamo che i punti x_1 e x_3 sono di minimo relativo ed il punto x_2 è di massimo relativo. Inoltre si ha che
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$,
mentre $f(x_3) = f(0) = -1$, $f(x_1) = f(-\frac{2}{\sqrt{a}}) = -1$ e $f(x_2) = -\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a} - 1$.
Da queste osservazioni, per la continuità di f su $\mathbb{R}$, si ha che essa ammette uno zero su $(0, +\infty)$ (unico perché $f' \neq 0$ su quest'intervallo). Per lo stesso motivo ammette un unico zero su $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{a}})$. Perché ammetta altri due zeri, uno in (x_1, x_2) e uno in (x_2, x_3) si deve avere che

$$f(x_1) = -\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a} - 1 > 0,$$

ovvero $0 < a < 1$.

II metodo.

Osserviamo che $ax^4 + 4x^3\sqrt{a} + 4x^2 - 1 = 0$ equivale a $(\sqrt{a}x^2 + 2x)^2 - 1 = 0$. Ovvero

$$(\sqrt{a}x^2 + 2x - 1)(\sqrt{a}x^2 + 2x + 1) = 0.$$

L'equazione ammette quattro soluzioni reali e distinte se e solo se ciascuna delle equazioni seguenti ammette due soluzioni reali e distinte:

$$\sqrt{a}x^2 + 2x - 1 = 0, \quad \sqrt{a}x^2 + 2x + 1 = 0,$$

ciò avviene se il loro discriminante è positivo. Per la prima $\Delta = 1 + \sqrt{a} > 0$ è verificato per ogni valore positivo di a, mentre per la seconda equazione $\Delta = 1 - \sqrt{a} > 0$ è verificato per $0 < a < 1$.