Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 16 gennaio 2018
Fila 1.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 5) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$|z - i| < |z + 2i|.$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\log 4x}{\log 2x}$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 10) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^1 x^2 [\log x]^n \ dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 7) dimostrare per induzione la seguente identitá

$$\int_0^1 x^2 [\log x]^n \ dx = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. (Punti 8) Calcolare il valore del limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^2 - x^4) - \sin(x^2 - x^3 - x^4)}{2(e^{x^2+x^3}) - 2x^2 + 2x^3 + x^4}.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1.

Svolgimento.

Posto $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ la disequazione diventa

$$|x + iy - i| < |x + iy + 2i| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x + i(y-1)| < |x + i(y+2)|$$

da cui

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \sqrt{x^2 + i(y+2)^2} \iff (y-1)^2 < (y+2)^2 \iff$$

$$\iff 1 - 2y < 4 + 4y \iff y > -\frac{1}{2}.$$

Le soluzioni sono tutti i numeri complessi z tali che $Im\, z > -\frac{1}{2}$.

Esercizio 2.

Svolgimento.

Il campo di esistenza è determinato dai valori della variabile x che rendono positivo l'argomento dei *logaritmi*, ovvero $x > 0$ e che non annullino il denominatore: $x \neq \frac{1}{2}$ Segno della funzione:

$$f(x) > 0 \iff \begin{cases} \log 4x > 0 \\ \log 2x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \log 4x < 0 \\ \log 2x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x > 1 \\ 2x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x < 1 \\ 2x < 1, \end{cases}$$

da cui

$$f(x) > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{4} \vee x > \frac{1}{2}, \quad f(x) < 0 \iff \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}.$$

Inoltre la funzione si annulla nel punto $x = \frac{1}{4}$.

Determiniamo il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty,$$

perchè per x che tende a $\frac{1}{2}^-$ l'argomento il *logaritmo* tende a 0^-.

Mentre

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty,$$

perchè il *logaritmo* tende a 0+.

Si osservi che il numeratore rimane sempre positivo vicino a $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log 4x}{\log 2x} =$$
(per il teorema dell'Hospital)
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4}{4x}}{\frac{2}{2x}} = 1.$$

$$\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{\log 4x}{\log 2x} =$$
(per il teorema dell'Hospital)
$$= \lim_{x\to0+} \frac{\frac{4}{4x}}{\frac{2}{2x}} = 1.$$

Calcoliamo la derivata prima per studiare la monotonia della funzione.

$$f'(x) = \frac{\log 2x \ - \ \log 4x}{x(\log 2x)^2} \ = -\log 2 \ \frac{1}{x(\log 2x)^2}.$$

É evidente che per ogni $x > 0$, con $x \neq \frac{1}{2}$ risulta $f'(x) < 0$, quindi la funzione é decrescente nell'intervallo $(0,\ \frac{1}{2})$ e nell'intervallo $(\frac{1}{2},\ +\infty)$. Non ammette massimi o minimo relativi. Inoltre é utile osservare che

$$\lim_{x\to0+} f'(x) = \lim_{x\to0+} -\log 2 \ \frac{1}{x(\log 2x)^2} \ = -\infty.$$

Perché, ricordando il limite notevole

$$\lim_{x\to0+} x\log x = 0^-,$$

otteniamo

$$\lim_{x\to0+} x(\log 2x)^2 = 0^+.$$

Determiniamo gli intervalli di concavità e/o convessità della funzione mediante la sua derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{\log 2 \ \log 2x \, (\log 2x \ + \ 2)}{x^2(\log 2x)^4}.$$

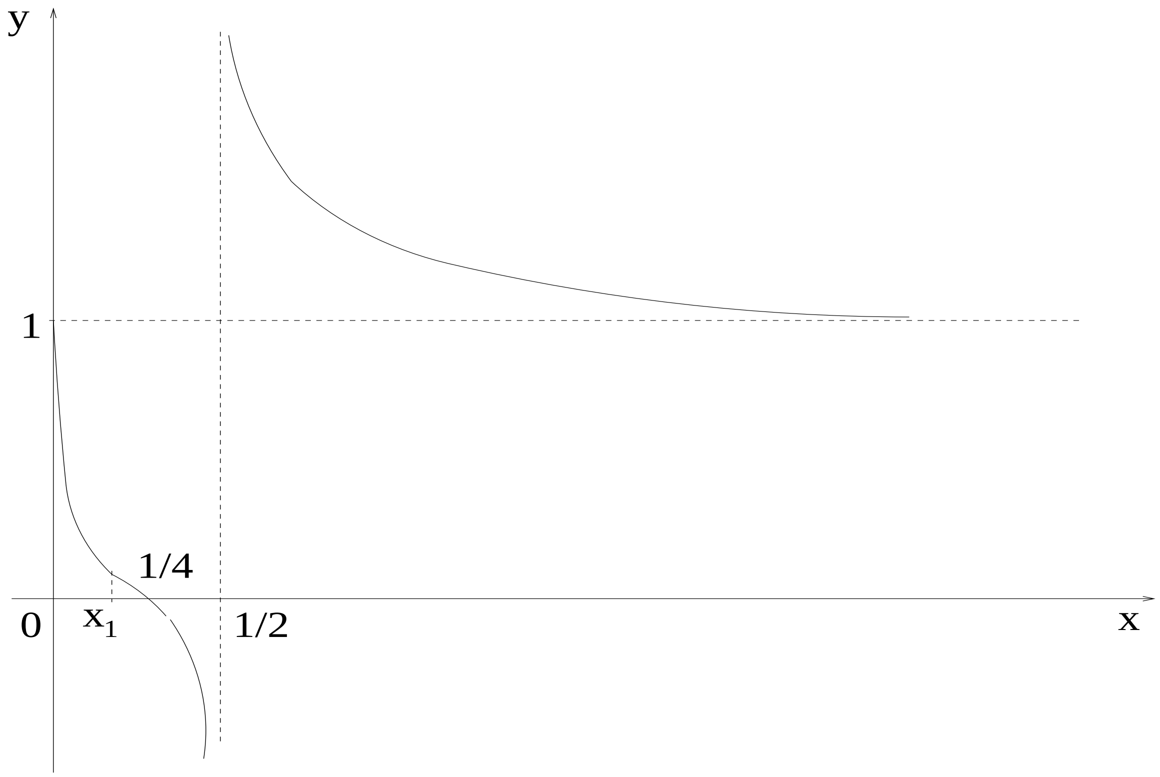
Il segno di f'' é determinato dal numeratore, ovvero

$$f''(x) > 0 \iff \begin{cases} \log 2x > 0 \\ \log 2x \ + \ 2 \ > \ 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \log 2x < 0 \\ \log 2x \ + \ 2 \ < \ 0 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{e^{-2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x < \frac{e^{-2}}{2}. \end{cases}$$

Quindi $f''(x) > 0$ per $x \in (0, \frac{e^{-2}}{2})$ e $x > \frac{1}{2}$.
Per questo possiamo affermare che la funzione é convessa sull'intervallo $(0, \frac{e^{-2}}{2})$ e sulla semiretta $(\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre é concava su $(\frac{e^{-2}}{2}, \frac{1}{2})$. Nel punto $x_1 = \frac{e^{-2}}{2}$ ammette un flesso.

$$f(x_1) = 1 - \frac{1}{2}\log 2 > 0, \quad f'(x_1) = -\frac{e^2 \log 2}{2}$$

Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f.



Esercizio 3.

(a).

La funzione é integrabile in senso improprio sull'intervallo $(0, 1]$ perché é intergabile secondo Riemann, dato che si puó prolungare con continuitá in $x = 0$ ponendo il prolungamento uguale a zero in questo punto, infatti

$$\lim_{x \to 0+} x^2 (\log x)^n \ dx \ = \ 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b).

Dimostriamo il primo passo dell'induzione, ovvero

$$\int_0^1 x^2 \left[\log x\right]^0 \ dx \ = \ (-1)^0 \, \frac{0!}{3^{0+1}}.$$

Questa é vera perché

$$\int_0^1 x^2 \; dx \; = \; \frac{1}{3}.$$

Proviamo ora l'induttivitá della proposizione, partendo da

$$\int_0^1 x^2 \, (\log x)^{n+1} \;\; dx \; = \; \lim_{c \to 0+} \int_c^1 x^2 (\log x)^{n+1} \;\; dx \; =$$

(Integrando per parti)

$$= \lim_{c \to 0+} \left[\frac{1}{3} x^3 (\log x)^{n+1} \right]_c^1 \; - \; \frac{1}{3} \int_c^1 x^2 (n+1) (\log x)^n \;\; dx \; =$$

$$= - \frac{n+1}{3} \lim_{c \to 0+} \int_c^1 x^2 (\log x)^n \;\; dx \; = \; - \frac{n+1}{3} \int_0^1 x^2 (\log x)^n \;\; dx \; =$$

(Per l'ipotesi induttiva)

$$= - \frac{n+1}{3} \, (-1)^n \, \frac{n!}{3^{n+1}} \; = \; (-1)^{n+1} \, \frac{(n+1)!}{3^{n+2}},$$

Esercizio 4.

Determiniamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

da questa, per $t = x^2 - x^3$ ricaviamo

$$\log(1+x^2-x^4) = x^2 - x^4 - \frac{(x^2-x^4)^2}{2} + o[(x^2-x^4)^2] \; = \; x^2 - x^4 - \frac{1}{2} x^4 + o(x^4) = x^2 - \frac{3}{2} x^4 + o(x^4).$$

$$\sin t = t + \frac{1}{6} t^3 + o(t^3),$$

per cui, per $t = x^2 - x^3 - x^4$

$$\sin(x^2 - x^3 - x^4) = (x^2 - x^3 - x^4) - \frac{1}{6} (x^2 - x^3 - x^4)^3 + o[(x^2 - x^3 - x^4)^3].$$

Tenuto conto di questo abbiamo

$$\log(1 + x^2 - x^3) \; - \; \sin(x^2 - x^3 - x^4) = x^3 + o(x^3).$$

Per quanto riguarda il denominatore tenuto conto che

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + o(t^2),$$

per $t = x^2 - x^3$ vale

$$e^{x^2-x^3} = 1 + x^2 - x^3 + \frac{(x^2-x^3)^2}{2} + o[(x^2-x^3)^2].$$

IL denominatore diventa

$$2(e^{x^2-x^3} - 1) - 2x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4) = 2x^4 + o(x^4)$$

Sostituiamo nel limite ed applichiamo il *principio di sostituzione degli infinitesimi*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}.$$

Questo limite non esiste perchè

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$