Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 12 giugno 2018

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 5) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$|z|\, z \,-\, 3\,\overline{z} \,=\, 1.$$

2. (Punti 8) Calcolare il valore del limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin 3x^2 \,-\, 3\arctan x^2}{\sqrt{1+5x^6} \,-\, \sqrt{1-3x^6}}.$$

3. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) \,=\, \sqrt[3]{(x-3)x^2}$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 3) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

4. (Punti 7) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\log(2\,-\,x)}{x^2}\; dx.$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 4) calcolarne il valore.

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1. (Punti 5) Determinare i valori di $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione:

$$|z|\, z \;-\; 3\,\overline{z} \;=\; 1.$$

Svolgimento.
(I metodo.)
Posto $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ l'equazione può essere espressa nella forma seguente

$$\sqrt{x^2+y^2}(x+iy) \;-\; 3(x+iy) \;=\; 1$$

di conseguenza l'equazione diventa

$$x\sqrt{x^2+y^2} \;-\; 3x \;+\; i[y\sqrt{x^2+y^2} \;+\; 3y] \;=\; 1.$$

Eguagliando rispettivamente la parte reale e qualla immaginaria del primo membro con quelle del secondo otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} \;-\; 3x = 1 \\ \\ y\sqrt{x^2+y^2} \;+\; 3y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ammette come soluzione solamente $y = 0$. Questo implica che le soluzioni sono reali. Inoltre sostituito $y = 0$ nella prima fornisce

$$\sqrt{x^2}x \;-\; 3x \;=\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x|x \;-\; 3x \;=\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x|x \;-\; 3x \;-1 \;=\; 0$$

Distinguendo i casi $x > 0$ e $x < 0$ ($x = 0$ non puó essere soluzione) rispettivamente otteniamo le equazioni $x^2 - 3x - 1 = 0$ e $-x^2 - 3x - 1 = 0$ che ammettono soluzioni, rispettivamente,

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \quad x_{3,4} = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ si scarta perché negativa. Le soluzioni dell'equazione data sono dunque

$$z_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}, \quad z_3 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad , z_4 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

(II metodo)

Posto $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, l'equazione diventa

$$\rho^2(\cos\theta + i\sin\theta) - 3\rho(\cos\theta - i\sin\theta) \;=\; 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho^2\cos\theta - 3\rho\cos\theta + i[\rho^2\sin\theta + 3\rho\sin\theta] = 1$$

Eguagliando rispettivamente le parti reali e le parti immaginarie del primo membro con quelle del secondo otteniamo

$$\begin{cases} \rho^2\cos\theta - 3\rho\cos\theta = 1 \\ \\ \rho^2\sin\theta + 3\rho\sin\theta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\rho^2 - 3\rho)\cos\theta = 1 \\ \\ (\rho^2 + 3\rho)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Poiché $z = 0$ non puó essere soluzione dell'equazione di partenza, la seconda equazione del sistema ha soluzione $\sin\theta = 0$, ovvero $\theta_k = k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$. Quindi l'equazione data ammette solo soluzioni reali. Inoltre tenuto conto che $\cos\ k\pi = (-1)^k$, la prima equazione del sistema diventa $(\rho^2 - 3\rho)(-1)^k = 0$. Da cui se k é pari: $\rho^2 - 3\rho - 1 = 0$. Se k é dispari $-\rho^2 + 3\rho - 1 = 0$. Si conclude come nei casi precedenti.

2. (Punti 8) Calcolare il valore del limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin\, 3x^2\ -\ 3\ \arctan\, x^2}{\sqrt{1+5x^6}\ -\ \sqrt{1-3x^6}}.$$

Svolgimento.
Utilizziamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\sin 3x^2\ =\ 3x^2 - \frac{9}{2}x^6 + o(x^6).$$

$$\arctan x^2\ =\ x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^6).$$

$$\sqrt{1+5x^6} = 1 + \frac{5}{2}x^6 + o(x^6).$$

$$\sqrt{1-3x^6} = 1 - \frac{3}{2}x^6 + o(x^6).$$

Sostituendo nel limite ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{7}{2}x^6 + o(x^6)}{4x^6 + o(x^6)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{7}{2}x^6}{4x^6} = -\frac{7}{8}.$$

3. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x)\ =\ \sqrt[3]{(x-3)x^2}$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 3) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

Il campo di esistenza è $\mathbb{R}$. Gli zeri della funzione sono $x_1 = 3$ e $x_2 = 0$. La funzione risulta positiva per $x > 3$, negativa per $x < 3$.
Determiniamo il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

Vediamo se esiste un asintoto obliqui, $y = mx + q$ per x che tende a $+\infty$, calcolando i limiti che seguono.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{(x-3)x^2}{x^3}} = 1.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{(x-3)x^2} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x}\right)} - 1\right] =$$

(applicando lo sviluppo di Taylor della radice)

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] = -1.$$

Ne segue che l'asinto obliquo per x che tende a $+\infty$ è la retta di equazione

$$y = x - 1.$$

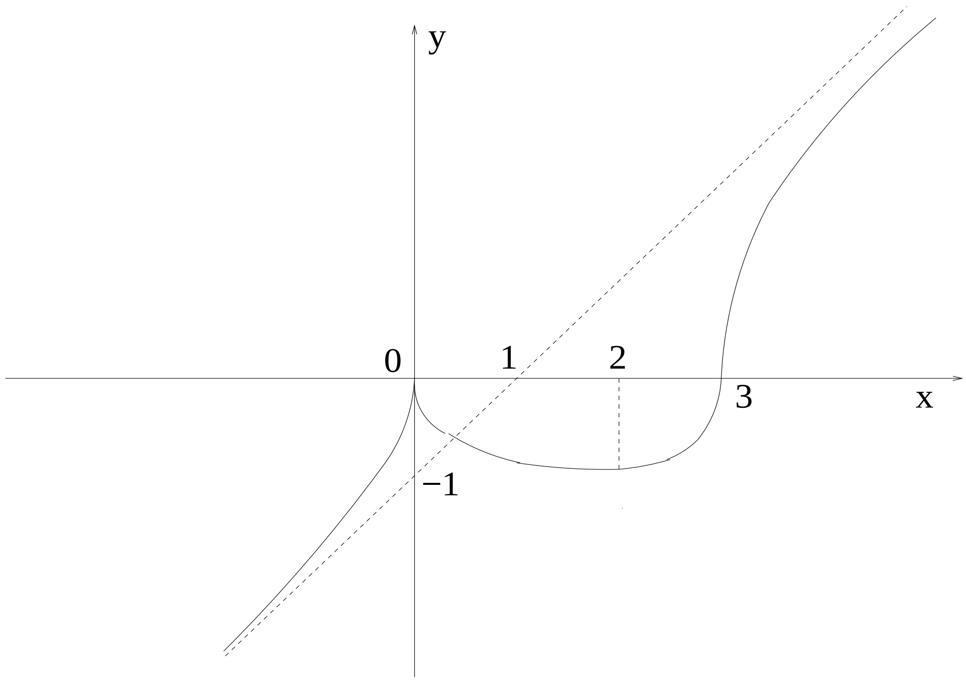
Lo stesso risultato si ottiene con calcoli analoghi per x che tende a $-\infty$.
Calcoliamo la derivata prima per studiare la monotonia della funzione.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 6x}{\sqrt[3]{(x-3)^2x^4}} = \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x-3)^2x}}.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ per sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$, quindi la funzione risulta crescente su ciascuno di questi. $f'(x) < 0$ su $(0, 2)$, dunque su questo la funzione é decrescente. Il punto $x_3 = 2$ é di minimo relativo, mentre $x_2 = 0$ é di massimo relativo.
Determiniamo gli intervalli di concavità e/o convessità della funzione mediante la sua derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{(x-3)^2x - (x-2)(x-1)(x-3)}{\sqrt[3]{(x-3)^8x^4}} = \frac{-2(x-3)}{\sqrt[3]{(x-3)^8x^4}}$$

Osserviamo che $f''(x) > 0$ se $x < 3$ e $f''(x) > 0$ se $x > 3$. Quindi la funzione risulta convessa sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, 3)$; f é concava su $(3, +\infty)$. Nel punto $x_1 = 3$ ha un flesso con tangente verticale (vedi sopra il limite della derivata prima). Tenuto conto di quanto dimostrato possiamo tracciare il seguente grafico approssimato di f.



3. (Punti 7) Si consideri l'integrale improprio

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\log(2-x)}{x^2}\ dx$$

a) (punti 3) dimostrare che esiste finito mediante mediante uno studio a priori;

b) (punti 4) calcolarne il valore.

Svolgimento.

(a) Osserviamo che la funzione integranda risulta continua in $[\,\frac{1}{2}, 2\,)$, inoltre per x che tende a 2^- tende a $-\infty$ e nell'intervallo considerato cambia segno. Studiamo l'assoluta intergabilitá.

$$\frac{|\log(2-x)|}{x^2} \leq 4|\log(2-x)| = 4\sqrt{2-x}\frac{|\log(2-x)|}{\sqrt{2-x}} \leq C\frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

La funzione

$$x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

é integrabile sull'intervallo dato in quanto l'esponente di $(2-x)$ é minore di uno. Sopra abbiamo maggiorato con una costante positiva C dato che per x che tende a 2^- abbiamo che $\sqrt{2-x}|\log(2-x)|$ tende a zero.

In definitiva per il teorema del confronto la funzione integranda é assolutamente integrabile e quindi é integrabile.

(b) Calcolo dell'integrale.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\log(2-x)}{x^2}\ dx \ = \lim_{c\to 2^-} \int_{\frac{1}{2}}^{c} \frac{\log(2-x)}{x^2}\ dx\,.$$

Risolviamo integrando per parti([1])

$$\int_{\frac{1}{2}}^{c} \frac{\log(2-x)}{x^2}\ dx \ = \ \left[-\frac{1}{x}\ \log(2-x)\right]_{\frac{1}{2}}^{c} \ - \ \int_{\frac{1}{2}}^{c} \frac{1}{x(2-x)}\ dx\,.$$

La funzione integranda é di tipo razionale. Applichiamo il metodo di scomposizione:

$$\frac{1}{x(2-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2-x} = \frac{(B-A)x + 2A}{x(2-x)}.$$

Da cui

$$\begin{cases} B - A = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B = \frac{1}{2}$$

Sostituendo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{c} \frac{1}{x(2-x)}\ dx \ = \ \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{c} \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}\ dx \ = \ \frac{1}{2}\left[\log|x| - \log|2-x|\right]_{\frac{1}{2}}^{c} \ =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log c - \log(2-c) + \log 3\right].$$

Sostituendo sopra

$$\lim_{c\to 2^-} \int_{\frac{1}{2}}^{c} \frac{\log(2-x)}{x^2}\ dx \ =$$

$$= \lim_{c\to 2^-} \left\{-\frac{1}{c}\log(2-c) + 2\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\log c - \log(2-c) + \log 3\right]\right\} =$$

$$= \lim_{c\to 2^-} \left[\frac{c-2}{2c}\ \log(2-c) - \frac{1}{2}\log c + \log 3 - 2\log 2\right] = \log 3 - \frac{5}{2}\log 2.$$

Perché

$$\lim_{c\to 2^-} \frac{c-2}{2c}\ \log(2-c) = 0.$$

1

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx \ = \ [f(x)\,g(x)]_a^b \ - \ \int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx.$$

Poniamo

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad g(x) = \log(2-x).$$