Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 6 febbraio 2018
Fila 1.

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 7) Dimostrare per induzione

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+2}{k} 2^k \ < \ 2^n \binom{n+1}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

2. (Punti 9) Data la funzione

$$f(x) \ = \ \log \left| \frac{x+1}{x+3} \right|,$$

a) (punti 3) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2)determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá;

d) (punti 2)disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 8) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{-2x^2 \ + \ x \ - \ 6}{x^3 \ + \ x^2 \ + \ 2x \ + \ 2} \ dx.$$

4. (Punti 6) Stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \ \left(1 \ - \ \cos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1.

Svolgimento.

La verifica del primo passo é ovvia, se n=1:

$$\binom{2}{0} 2^0 \; < \; 2\binom{2}{0} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \; < \; 2.$$

Verifichiamo l'induttivitá della proposizione

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{k} 2^k \; = \; \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+2}{k} 2^k \; + \; \binom{n+2}{n} 2^n \; <$$

(Per l'ipotesi induttiva)

$$< \; 2^n \binom{n+1}{n-1} \; + \; 2^n \binom{n+2}{n} \; < \; 2^{n+1} \binom{n+2}{n}.$$

L'ultimo passaggio é verificato in quanto

$$2^n \binom{n+1}{n-1} \; + \; 2^n \binom{n+2}{n} \; < \; 2^{n+1} \binom{n+2}{n}$$

equivale a

$$2^n \binom{n+1}{n-1} \; < \; [2^{n+1} - 2^n] \binom{n+2}{n} \; = \; 2^n \binom{n+2}{n},$$

da cui

$$\binom{n+1}{n-1} \; < \; \binom{n+2}{n} \quad \Longleftrightarrow \; n < n+2,$$

che é vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.

La funzione é definita per ogni $x \neq -3$ e $x \neq -1$.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -3} = +\infty.$$

Inoltre all'infinito abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Esplicitando il valore assoluto

$$f(x) = \begin{cases} \log \dfrac{x+1}{x+3}, & x < -3 \ \vee \ x > -1, \\ \\ \log \left(-\dfrac{x+1}{x+3} \right), & -3 < x < -1. \end{cases}$$

Da questa otteniamo se $x < -3 \ \vee \ x > -1$

$$\log \frac{x+1}{x+3} \geq 0 \iff \frac{x+1}{x+3} \geq 1 \Longrightarrow x < -3$$

oppure se $-3 < x < -1$

$$\log \left(-\frac{x+1}{x+3} \right) \geq 0 \iff -\frac{x+1}{x+3} \geq 1 \Longrightarrow -3 < x \leq -2$$

Da questo $f(x) < 0$ per $-2 < x < -1$ oppure $-1 < x$. Tutto questo ci permette di precisare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+.$$

Per quanto riguarda la derivata di f, ricordiamo che $f'(y) = D \log |y| = \frac{1}{y}$, quindi

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}.$$

Quindi
$f'(x) > 0$ se $x < -3$ oppure $x > -1$, mentre $f'(x) < 0$ se $-3 < x < -1$. Ne segue che la funzione non ammette punti di massimo o di minimo relativo e risulta crescente nella semiretta $(-\infty, -3)$ oppure nella semiretta $(-1, +\infty)$, decrescente nell'intervallo $(-3, -1)$. Determiniamo ora gli intervalli di concavitá o convesitá mediante la derivata seconda.

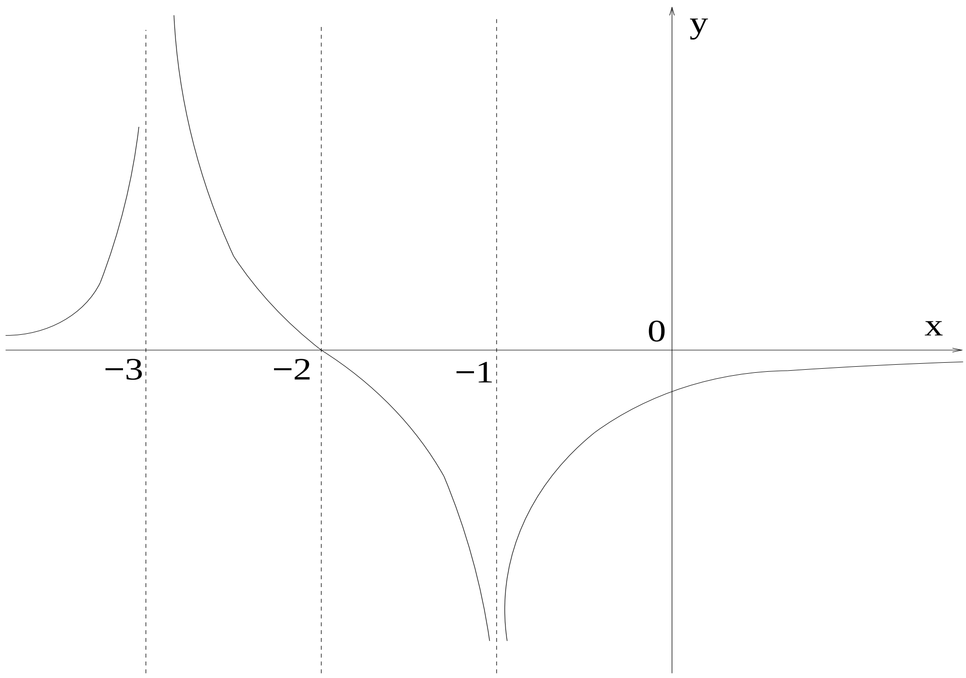
$$f''(x) = -\frac{4(x+2)}{(x+1)^2(x+3)^2}.$$

Quindi $f''(x) > 0$ per $-3 < x < -2$ oppure $x < -3$, mentre $f''(x) < 0$ per $-2 < x < -1$ oppure $x > -1$. $f''(-2) = 0$. Ne segue che la funzione é convessa sulla semiretta $(-\infty, -3)$ e sull'intervallo $(-3, -2)$, concava sull'intervallo $(-2, -1)$ oppure sulla semiretta $(-1, +\infty)$. Nel punto $x = -2$ la funzione ammette un flesso con tangente avente coefficiente angolare $f'(-2) = -2$.
A questo punto possiamo tracciare il grafico. Si osservi che questo ammette una simmetria rispetto al punto $(-2, 0)$. Infatti si presenta una disparità rispetto a $x = -2$, come si verifica facilmente dopo aver posto $t = x + 2$.

$$\log \left| \frac{x+1}{x+3} \right| = \log \left| \frac{x+2-1}{x+2+1} \right| = \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|,$$

quindi

$$f(-t) = \log \left| \frac{-t-1}{-t+1} \right| = \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| = \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|^{-1} = -\log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = -f(t).$$



Esercizio 3.

Scomponiamo il denominatore della frazione integranda mediante un raccoglimento a fattore parziale.

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = x^2(x+1) + 2\,(x+1) = (x+1)(x^2+2).$$

Da questo deduciamo che il polinomio ha una reale $x_1 = -1$ e due complesse coniugate $x_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$ di molteplicitá uno. Utilizziamo la formula di Hermite e calcoliamo i parametri reali A, B, C tali che

$$\frac{-2x^2 + x - 6}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2)}.$$

Deve quindi essere verificata l'identità

$$-2x^2 + x - 6 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assegniamo nei polinomi al numeratore ad x rispettivamente i valori -1, 1 e 0 ottenendo il sistema

$$\begin{cases} -9 = 3A \\ -7 = 3A + (B+C)2 \\ -6 = 2A + C \end{cases}$$

da cui $A = -3$, $B = 1$, $C = 0$. Sostituendo nell'integrale

$$\int_0^1 \frac{-2x^2 + x - 6}{x^3 + x^2 + 2x + 2}\, dx = -3 \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\, dx =$$

$$= \left[-3 \log|x+1|\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\log(x^2+2)\right]_0^1 = -\frac{7}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3.$$

Esercizio 4.

Il termine generale della serie é infinitesimo ed inoltre i termini sono positivi perché, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0.$$

Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. A tale scopo osserviamo che per n che tende a $+\infty$ l'argomento del *coseno* tende a zero quindi applicando lo sviluppo di Taylor della funzione nell'intorno di zero

$$\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Il termine generale si puó scrivere

$$\frac{1}{n+2}\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{n+2}\left[\frac{1}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{(n+1)}\right)\right].$$

É evidente che la serie si comporta come $\frac{1}{n^2}$.
Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2(n+2)(n+1)} + o\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

La serie data converge perché si comporta quindi come la serie armonica convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$