ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

Esercizio 1. Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^5}{(1-i)^7}$$

Per risolvere l'esercizio proposto applichiamo le formule per il calcolo della potenza e del rapporto tra numeri complessi. A tale scopo, dobbiamo esprimere i numeri complessi che compaiono nella formulazione dell'esercizio in forma trigonometrica. Per cui poniamo :

$$w = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = 1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Quindi sostituendo nell'espressione data:

$$z = \frac{w^5}{v^7} = \frac{[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^5}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^7} =$$

(per la formula di de Moivre)

$$= \frac{\rho^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)}{r^7(\cos 7\theta + i\sin 7\theta)} =^{1}$$

$$= \frac{\rho^5}{r^7}\left[\cos(5\varphi - 7\theta) + i\sin(5\varphi - 7\theta)\right] \tag{1}$$

A questo punto per completare l'esercizio si devono calcolare i moduli e gli argomenti di w e v.

$$| w |= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$| v |= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Per calcolare gli argomenti di w e v si devono risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{3}$$

[1] il rapporto tra due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il rapporto dei moduli e per argomento la differenza tra gli argomenti.

Risolviamo il primo sistema: Gli angoli $\varphi \in [0, 2\pi]$ che risolvono la prima equazione sono: $\varphi = \frac{5}{6}\phi$ oppure $\varphi = \frac{7}{6}\pi$, mentre la seconda equazione è risolta dai valori $\varphi = \frac{\pi}{6}$ e $\varphi = \frac{5}{6}\pi$. Il sistema (2) ha quindi per soluzione :$\varphi = \frac{5}{6}\pi$.
Risolviamo il secondo sistema: Gli angoli $\theta \in [0, 2\pi]$ che risolvono la prima equazione sono: $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{7}{4}\pi$, mentre la seconda equazione è risolta dai valori $\theta = \frac{5}{4}\pi$ e $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Il sistema (2) ha quindi per soluzione :$\theta = \frac{7}{4}\pi$.
Continuiamo lo svolgimento dell'esercizio sostituendo nell'espressione (1) i valori di $\mid w \mid$, $\mid v \mid$, θ, φ, sopra calcolati:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^7} \left[\cos\left(5\frac{5}{6}\pi - 7\frac{7}{4}\pi\right) + \sin\left(5\frac{5}{6}\pi - 7\frac{7}{4}\pi\right)\right] = \\ = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{25}{6}\pi - \frac{49}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{25}{6}\pi - \frac{49}{4}\pi\right)\right] = \\ = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[\cos\left(-\frac{97}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{97}{12}\pi\right)\right] \end{aligned}$$

Si tratta di determinare l'argomento principale di z cioè l'angolo $\xi \in [0, 2\pi)$ tale che :$z = \sigma(\cos\xi + i\sin\xi)$ dove $\sigma =\mid z \mid= \frac{1}{8\sqrt{2}}$. Per questo osserviamo che $-97\pi = -8 \times 12\pi - 1\pi = -8 \times 12\pi - 2 \times 12\pi + 2 \times 12\pi - 1 = -8 \times 12\pi - 2 \times 12\pi + 23\pi$ per cui

$$-\frac{97}{12}\pi = -5 \times 2\pi + \frac{23}{12}\pi$$

L'argomento principale di z è $\xi = \frac{23}{12}\pi$ mentre il modulo di z è $\sigma =\mid z \mid= \frac{1}{8\sqrt{2}}$.

Esercizio 2. Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^6}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4}$$

Procediamo come nell'esercizio precedente ponendo:

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = 1 - i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Quindi sostituendo nell'espressione data:

$$z = \frac{w^6}{v^4} = \frac{[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^6}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^4} =$$

(per la formula di de Moivre)

$$= \frac{\rho^6(\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi)}{r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)} =^2$$

$$= \frac{\rho^6}{r^4}\left[\cos\left(6\varphi - 4\theta\right) + i\sin\left(6\varphi - 4\theta\right)\right] \tag{4}$$

Procedendo come nell'esercizio svolto sopra, calcoliamo il moduli e gli argomenti di w e v, in modo da poterli sostituire nella (4), ed otteniamo:

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) \tag{5}$$

$$v = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) \tag{6}$$

[2] il rapporto tra due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il rapporto dei moduli e per argomento la differenza tra gli argomenti.

Sostituiamo in (4) :

$$z = \frac{1}{128}\left[\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{13}{6}\pi\right)\right]$$

Osserviamo che $-\frac{13}{6}\pi = -2\pi - \frac{1}{6}\pi == -2\pi - 2\pi + 2\pi - \frac{1}{6}\pi = -4\pi + \frac{11}{6}\pi$, quindi L'argomento principale di z è : $\xi = \frac{11}{6}\pi$, mentre il suo modulo è $\frac{1}{128}$.

Esercizio 3. Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{(2-2i)^4}{\left(-3\sqrt{3}-3i\right)^6}$$

Il procedimento è identico a quello degli esercizi già visti sopra .

$$w = -2 - i2 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = -3\sqrt{3} - i3 = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$w = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) \tag{7}$$

$$v = 6\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) \tag{8}$$

Applicando le formule viste sopra, in definitiva:

$$z = \frac{1}{3^6}\left[\cos(-2\pi) + i\sin 2\pi)\right] = \frac{1}{3^6}\left[\cos 0 + i\sin 0\right]$$

Per cui $\mid z \mid = \frac{1}{3^6}$ e l'argomento principale è $\xi = 0$.

Esercizio 4. Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso:

$$z = \frac{\left(\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^4}$$

Anche questo esercizio viene risolto in maniera del tutto identica a quella degli esercizi precedenti.

$$w = \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$v = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$w = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right) \tag{9}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) \tag{10}$$

Applicando le formule viste sopra otteniamo:

$$z = \frac{128}{243}\left[\cos(-\frac{16}{3}\pi) + i\sin(-\frac{16}{3}\pi)\right] = \frac{128}{243}\left[\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right]$$

Per cui $\mid z \mid = \frac{128}{243}$ e l'argomento principale è $\xi = \frac{2}{3}\pi$.
Esercizio 5.

Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^2 \,-\, |\overline{z}\,-\,3| \,-\, 3 \,=\, 0.$$

Svolgimento

Per risolvere l'equazione poniamo:$z = x + iy$. Sostituendo si ha

$$(x+iy)^2 - |x-iy-3| - 3 = 0 \iff x^2 - y^2 + 2xyi - \sqrt{(x-3)^2+y^2} - 3 = 0 \tag{11}$$

Tenendo presente che un numero complesso è zero se e solo se sono zero la sua parte reale e la sua parte immaginaria, da (11) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - \sqrt{(x-3)^2+y^2} - 3 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Da questo otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 - \sqrt{9+y^2} - 3 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - \sqrt{(x-3)^2} - 3 = 0 \end{cases} .$$

Ovvero

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 3 = -\sqrt{9+y^2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - |x-3| - 3 = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo sistema equivale ai seguenti

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x - 3 < 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema non ha soluzioni mentre il secondo ha $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
La soluzione dell'equazione data è:

$$z_1 = -3, \quad z_2 = 2.$$

Esercizio 6.
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$\overline{z}^{\,3}\, z^4 \,=\, -2\, z^2.$$

Svolgimento.

Osserviamo che una soluzione è $z = 0$. Cerchiamo le soluzioni $z \neq 0$. Possiamo dividere per z^2 ed otteniamo

$$\overline{z}^{\,3}\, z^2 = -2$$

Eguagliamo il modulo del primo membro a quello del secondo: $|z|^5 \,=\, 2$ onde $|z| \,=\, \sqrt[5]{2}$. Tenuto conto di questo e scomponendo l'espressione dell'equazione data:

$$\overline{z}^{\,2}\, z^2\, \overline{2} = -2 \Longrightarrow |z|^4\, \overline{z} = -2 \iff \overline{z} = -\frac{2}{(\sqrt[5]{2})^4} = -\sqrt[5]{2}.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono dunque $z_1 = 0$ e $z_2 = -\sqrt[5]{2}$.
Esercizio 7.
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z + 2| = \overline{z}^{\,2} - 1.$$

Svolgimento
Per risolvere l'equazione poniamo:$z = x + iy$. Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} |x+iy+2| = (x-iy)^2 - 1 &\iff \sqrt{(x+2)^2+y^2} = x^2 - y^2 - 2xyi - 1 \\ &\iff \sqrt{(x+2)^2+y^2} + 1 - x^2 + y^2 + 2xyi = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Tenendo presente che un numero complesso è zero se e solo se sono zero la sua parte reale e la sua parte immaginaria, da (12) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2} = x^2 - y^2 - 1 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Da questo otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{4+y^2} = -y^2 - 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ |x+2| = x^2 - 1 \end{cases}.$$

Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo sistema equivale ai seguenti

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x + 2 = x^2 - 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x + 2 < 0 \\ x^2 - 1 = -x - 2 \end{cases}.$$

Il secondo sistema non ha soluzioni mentre il primo ha $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
La soluzione dell'equazione data è:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Esercizio 8.
Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^4\, \overline{z}^{\,2} = -16\, \overline{z}^{\,2}.$$

Svolgimento

Osserviamo che $z = 0$ è una soluzione. Cerchiamo le soluzioni $z \neq 0$. Dividendo per $\overline{z}$ entrambi i membri dell'equazione

$$z^4 = -16 \iff z \in \sqrt[4]{-16}$$

Scriviamo in forma trigonometrica -16 ed applichiamo la formula per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso ottenendo le altre soluzioni dell' equazione data

$$-16 = 16\{\cos\pi + i\sin\pi\}$$

$$z \in \left\{ 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad k=0,1,2,3 \right\}.$$

Onde

$$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ \ z_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},\ \ z_3=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},\ \ z_4=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

Esercizio 9.

Determinare le coppie $(z,w)\in\mathbb{C}$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overline{w}\,z \ + \ 1 \ - \ i\sqrt{3} \ = \ 0 \\ \\ z^3\,|z^2| \ - \ \overline{z}^{\,2}\,w \ = \ 0. \end{cases}$$

Svolgimento.
Il sistema dato equivale ai seguenti:

$$\begin{cases} \overline{w}\,z \ = \ -1 + i\sqrt{3} \\ \\ z^3\,|z|^2 \ - \ \overline{z}^{\,2}\,w \ = \ 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{\overline{w}\,z} \ = \ \overline{-1 + i\sqrt{3}} \ = \ -1 - i\sqrt{3} \\ \\ z^3\,z\,\overline{z} \ - \ \overline{z}\,\overline{z}\,w \ = \ 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w\,\overline{z} \ = \ -1 - i\sqrt{3} \\ \\ z^4\,\overline{z} \ - \ \overline{z}\,(-1 - i\sqrt{3}) \ = \ 0 \end{cases}$$

Poiché $z=0$ non può essere soluzione della prima equazione, possiamo dividere la seconda per $\overline{z}$ ottenendo

$$z^4 \ = \ -1 \ - \ i\sqrt{3}.$$

Questa viene risolta calcolando le radici quarte nel campo complesso del secondo membro. A tale scopo scriviamo questo numero in forma trigonometrica nel modo seguente:

$$-1 \ - \ i\sqrt{3} \ = \ 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi \ + \ i\,\sin\frac{4}{3}\pi\right).$$

Le radici quarte sono quindi

$$\sqrt[4]{-1 \ - \ i\sqrt{3}} \ = \ \sqrt[4]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right) \ + \ i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right),\ k=0,1,2,3\right\}.$$

Le soluzioni z sono:
$z_0=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\quad z_1=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $\quad z_2=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$, $\quad z_3=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$.
Da cui

$\overline{z_0} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$, $\quad \overline{z_1} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3} - i)$, $\quad \overline{z_2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\quad \overline{z_3} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$. Dalla prima equazione del terzo sistema otteniamo w :

$$w_0 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left[\frac{\cos \frac{4}{3}\pi \, + \, i \, \sin \frac{4}{3}\pi}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \, + \, i \, \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\cos \frac{5}{3}\pi \, + \, i \, \sin \frac{5}{3}\pi \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\frac{1}{2} \, - \, i \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$w_1 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left[\frac{\cos \frac{4}{3}\pi \, + \, i \, \sin \frac{4}{3}\pi}{\cos \frac{7}{6}\pi \, + \, i \, \sin \frac{7}{6}\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left[\cos \frac{\pi}{6} \, + \, i \, \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \, + \, i \, \frac{1}{2} \right) \; ;$$

$$w_2 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\frac{\cos \frac{4}{3}\pi \, + \, i \, \sin \frac{4}{3}\pi}{\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) \, + \, i \, \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\cos \frac{8}{3}\pi \, + \, i \, \sin \frac{8}{3}\pi \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(-\frac{1}{2} \, + \, i \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$w_3 = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\frac{\cos \frac{4}{3}\pi \, + \, i \, \sin \frac{4}{3}\pi}{\cos \frac{\pi}{6} \, + \, i \, \sin \frac{\pi}{6}} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\cos \frac{7}{6}\pi \, + \, i \, \sin \frac{7}{6}\pi \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \, - \, i \, \frac{1}{2} \right);$$

In definitiva le soluzioni sono date dalle coppie:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1 + i\sqrt{3}), \; \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\frac{1}{2} \, - \, i \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right); \; \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3} + i), \; \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \, + \, i \, \frac{1}{2} \right) \right);$$

$$\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \; \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(-\frac{1}{2} \, + \, i \, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right); \; \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} - i), \; \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \; \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \, - \, i \, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Esercizio 10.

Determinare le coppie $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ che risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \overline{z}^{\,2} \, - \, w^2 & = \; -1 \\ \overline{w}^{\,2} \, - \, z & = \; 0. \end{cases}$$

Svolgimento.

Il sistema dato equivale al seguente

$$\begin{cases} \overline{z}^{\,2} \, - \, w^2 \; = \; -1 \\ z \, = \, \overline{w}^{\,2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} w^4 - w^2 + 1 \; = \; 0 \\ \overline{z} \, = \, w^2 \end{cases} .$$

La prima equazione del sistema è un'equazione *biquadratica* che si risolve ponendo $u = w^2$, e quindi $u^2 - u + 1 = 0$, che ha soluzioni

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i.$$

Determiniamo le soluzioni dell'equazione $u = w^2$ calcolando le radici quadrate di $u_{1,2}$. A tale scopo passiamo alla forma trigonometrica:

$$u_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \cos\frac{5}{3}\pi + i\,\sin\frac{5}{3}\pi$$

Applicando a questi numeri la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso, otteniamo rispettivamente

$$\begin{cases} w_1 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \\ w_2 = \cos\dfrac{7}{6}\pi + i\,\sin\dfrac{7}{6}\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w_3 = \cos\dfrac{5}{6}\pi + i\,\sin\dfrac{5}{6}\pi \\ \\ w_4 = \cos\dfrac{11}{6}\pi + i\,\sin\dfrac{11}{6}\pi \end{cases}.$$

Da cui, mediante la formula di De Moivre:

$$\begin{cases} z_1 = \overline{w_1}^2 = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\,\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \\ z_2 = \overline{w_2}^2 = \cos\dfrac{7}{3}\pi - i\,\sin\dfrac{7}{3}\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z_3 = \overline{w_3}^2 = \cos\dfrac{5}{3}\pi - i\,\sin\dfrac{5}{3}\pi \\ \\ z_4 = \overline{w_4}^2 = \cos\dfrac{11}{3}\pi - i\,\sin\dfrac{11}{3}\pi \end{cases}.$$

In definitiva le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{aligned} (z_1; w_1) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i;\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right), \\ (z_2; w_2) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i\right), \\ (z_3; w_3) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right), \\ (z_4; w_4) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i;\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i\right). \end{aligned}$$