**Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica**

**ANALISI MATEMATICA 1**

**Prova scritta del 25 febbraio 2017**
**Fila 1.**

**Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.**

**1. (Punti 7)** Posto
$$z = \sqrt{3} + i$$
determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ risulta:
$$z^n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |z|^n < 100$$

**2. (Punti 10)** Data la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{-2x^2 + 6|x| - 4}$$

**a)** (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

**b)** (punti 4) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo; equazioni delle rette tangenti al grafico nei punti singolari (ovvero nelle eventuali cuspidi, negli eventuali punti angolosi o negli eventuali punti di flesso).

**c)** (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

**d)** (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

**3. (Punti 8)** Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{[\log(1+4x)]^2 - 4[\log(1+2x)]^2}{2\sin 5x - 5\sin 2x}.$$

**4. (Punti 8)** Calcolare
$$\int_2^4 (x-3)^{36} \arctan|x-3|^{37} \quad dx.$$

**Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica**

**ANALISI MATEMATICA 1**

**Prova scritta del 25 febbraio 2017**
**Fila 2.**

**Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.**

**1. (Punti 7)** Posto
$$z = 1 + i$$
determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ risulta:
$$z^n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad 200 < |z|^n < 300$$

**2. (Punti 10)** Data la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 10\,|x| + 24}$$

**a)** (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

**b)** (punti 4) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo; equazioni delle rette tangenti al grafico nei punti singolari (ovvero nelle eventuali cuspidi, negli eventuali punti angolosi o negli eventuali punti di flesso).

**c)** (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

**d)** (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

**3. (Punti 8)** Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{9\,\sin^2 4x - 16\,\sin^2 3x}{e^{-2x^2} - \cos 2x}.$$

**4. (Punti 8)** Calcolare
$$\int_1^3 |x-2|^{99}\ \arctan(x-2)^{100}\quad dx.$$

**Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica**

**ANALISI MATEMATICA 1**

**Prova scritta del 25 febbraio 2017**
**Fila 3.**

**Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.**

**1. (Punti 7)** Posto

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$

determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$z^n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad 50 < |z|^n < 100$$

**2. (Punti 10)** Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8|x| + 15}$$

**a)** (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

**b)** (punti 4) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo; equazioni delle rette tangenti al grafico nei punti singolari (ovvero nelle eventuali cuspidi, negli eventuali punti angolosi o negli eventuali punti di flesso).

**c)** (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

**d)** (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

**3. (Punti 8)** Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{36}\sin^2 6x - \frac{1}{25}\sin^2 5x}{4[\log(1+3x)]^2 - [\log(1+6x)]^2}.$$

**4. (Punti 8)** Calcolare

$$\int_0^2 (x-1)^{24} \arctan|x-1|^{25} \quad dx.$$

**Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica**

**ANALISI MATEMATICA 1**

**Prova scritta del 25 febbraio 2017**
**Fila 4.**

**Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.**

**1. (Punti 7)** Posto

$$z = 2 + i\,2\sqrt{3},$$

determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ risulta:

$$z^n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |z|^n < 100$$

**2. (Punti 10)** Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{-2x^2 + 14\,|x| - 24}$$

**a)** (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, segno, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

**b)** (punti 4) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo; equazioni delle rette tangenti al grafico nei punti singolari (ovvero nelle eventuali cuspidi, negli eventuali punti angolosi o negli eventuali punti di flesso).

**c)** (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità;

**d)** (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

**3. (Punti 8)** Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\log(1+3x^2) - 3\,\log(1+2x^2)}{4\sin^2 3x - 9\sin^2 2x}.$$

**4. (Punti 8)** Calcolare

$$\int_3^5 (x-4)^{20}\ \arctan|x-4|^{21}\ \ dx.$$

## RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI DELLA FILA 1

**Esercizio 1**

Esprimiamo il numero $z = \sqrt{3} + i$ in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, per questo determiniamo $\theta$ e $\rho$ utilizzando le formule:

$$\rho = \sqrt{(Re\, z)^2 + (Im\, z)^2}, \quad \cos\theta = \frac{Re\, z}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{Im\, z}{\rho},$$

quindi

$$\rho = 2, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

Da questa deduciamo che l'argomento principale del numero complesso è $\theta = \frac{\pi}{6}$, quindi

$$z \;=\; 2\left(\cos\frac{\pi}{6} \;+\; i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Calcoliamo $z^n$ mediante la formula di De Moivre:

$$z^n \;=\; 2^n\left(\cos\, n\,\frac{\pi}{6} \;+\; i\,\sin\, n\,\frac{\pi}{6}\right)$$

Risulta $z \in \mathbb{R}$ se la parte immaginaria è nulla, ovvero $\sin\, n\,\frac{\pi}{6} = 0$. Questo è verificato per i valori di $n$ tali che

$$n\,\frac{\pi}{6} \;=\; k\,\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Dovendo essere $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, otteniamo che $n = 6k$, con $k \in N \setminus \{0\}$. Tenuto conto anche della seconda condizione richiesta: $|z|^n < 100$, otteniamo che $n = 6$ in quanto $|z|^6 = \rho^6 = 2^6 = 64 < 100$ mentre per $n \geq 7$ si verifica facilmente che $|z|^n > 100$.

**Esercizio 2**

La funzione è composizione di una radice dispari con un polinomio, che sono definite entrambi su tutto $\mathbb{R}$, quindi $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. La funzione è pari in quanto

$$f(-x) = \sqrt[3]{-2(-x)^2 \;+\; 6\,|-x| \;-\; 4} = \sqrt[3]{-2x^2 \;+\; 6\,|x| \;-\; 4} = f(x).$$

È sufficiente studiare $f$ per $x \geq 0$, quindi mediante per simmetria rispetto a $x = 0$ otterremo il suo comportamento per $x < 0$.
Sia dunque $x \geq 0$, per cui possiamo scrivere l'espressione della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{-2x^2 \;+\; 6\,x \;-\; 4}$$

Determiniamo il segno di $f$ risolvendo $f(x) \geq 0$, ovvero

$$\sqrt[3]{-2x^2 \;+\; 6\,x \;-\; 4} \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad -2x^2 \;+\; 6\,x \;-\; 4 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 \leq x \leq 2.$$

Agli estremi del dominio risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{2 \;-\; \frac{6}{x} \;+\; \frac{4}{x^2}} = -\infty.$$

Per simmetria anche $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
La funzione non ammette asintoti all'infinito in quanto

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x} = 0.$$

Stesso risultato per $x$ che tende a $-\infty$.
Determiniamo gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{-(2x-3)}{\sqrt[3]{(-2x^2 + 6x - 4)^2}}$$

Da cui $f'(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$. La funzione è crescente per $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ e decrescente per $x \geq \frac{3}{2}$. Il punto $x_0 = \frac{3}{2}$ è di massimo relativo. Per simmetria:
la funzione è decrescente per $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$ e crescente per $x \leq -\frac{3}{2}$. Il punto $x_1 = -\frac{3}{2}$ è di massimo relativo.
Osserviamo che la derivata prima non è definita dei punti $x = 1$ e $x = 2$, dove abbiamo

$$\lim_{x\to1} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to2} f'(x) = -\infty.$$

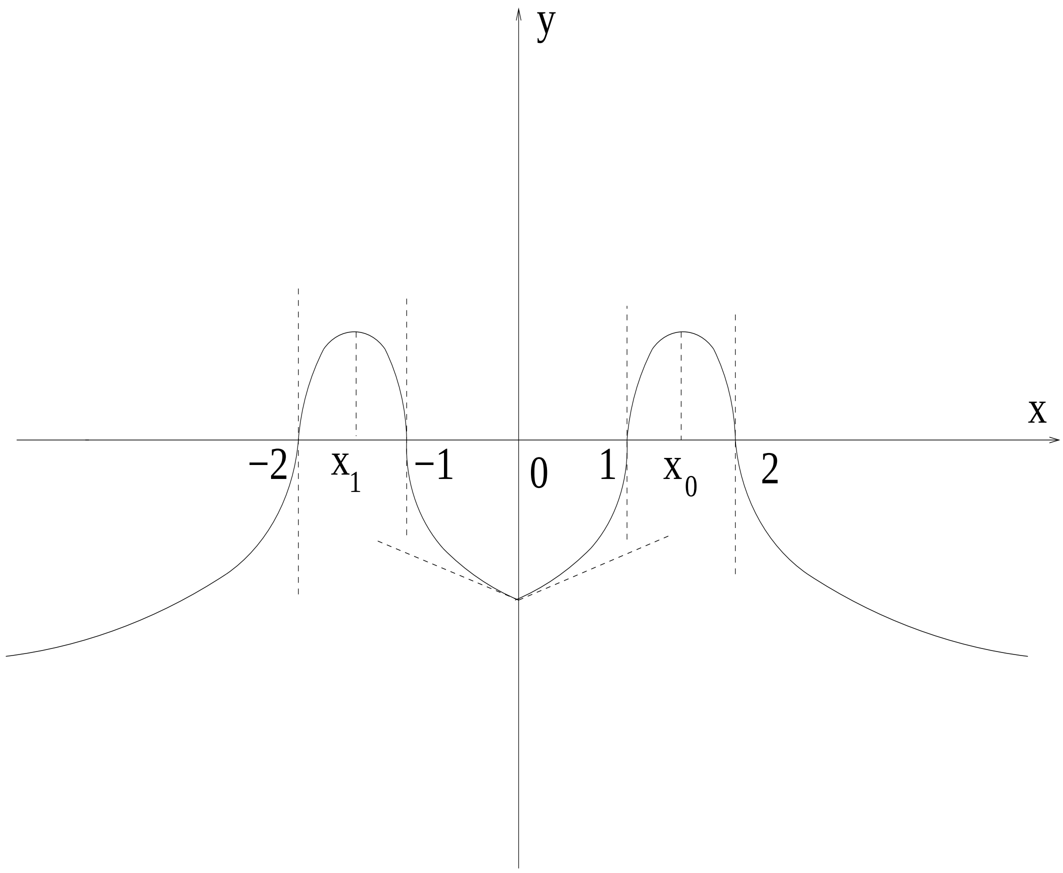
Per cui le rette $x = 1$ e $x = 2$ sono rette tangenti verticali al grafico di $f$.
Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile in quanto

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, \quad \lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

Si tratta dunque di un punto angoloso avente come tangente destra $y = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}x - \sqrt[3]{4}$ e tangente sinistra $y = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}x - \sqrt[3]{4}$.
Determiniamo gli intervalli di concavità e convessità.

$$f''(x) = \frac{2}{9} \frac{-4x^2 + 12x - 12}{\sqrt[3]{(-2x^2 + 6x - 4)^4}\sqrt[3]{-2x^2 + 6x - 4}}.$$

Il segno della derivata seconda è determinato dal termine posto al denominatore sotto la radice terza in quanto il polinomio al numeratore risulta sempre negativo avendo $\Delta < 0$. Quindi $f''(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1$, oppure $2 \leq x$. Di conseguenza la funzione è convessa sull'intervallo $[0, 1]$ e sull'intervallo $[2, +\infty)$. Mentre è concava su $[1, 2]$.
Per simmetria la funzione è convessa sull'intervallo $[-1, 0]$ e sull'intervallo $[-\infty, -2]$. Mentre è concava su $[-2, -1]$.
Possiamo quindi tracciare il seguente grafico.




**Esercizio 3**

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per risolverlo ricorriamo agli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione. Tenuto conto che

$$\log(1+t) \;=\; t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Se poniamo $t = 4x$ e sostituiamo:

$$\log(1+4x) = 4x - 8x^2 + o(x^2),$$

quindi

$$[\log(1+4x)]^2 = [4x - 8x^2 + o(x^2)]^2 = 16x^2 - 64x^3 + o(x^3).$$

Mentre se poniamo $t = 2x$

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

otteniamo

$$4[\log(1+2x)]^2 = 4[2x - 2x^2 + o(x^2)]^2 = 4[4x^2 - 8x^3 + o(x^3)] = 16x^2 - 32x^3 + o(x^3)$$

Consideriamo poi

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3),$$

per $t = 5x$ risulta

$$2\sin 5x = 2\left(5x - \frac{125}{6}x^3 + o(x^3)\right) = 10x - \frac{125}{3}x^3 + o(x^3);$$

mentre per $t = 2x$

$$5\sin 2x = 5\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) = 10x - \frac{20}{3}x^3 + o(x^3).$$

Sostituiamo nel limite applicando poi il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\log(1+4x)]^2 \ - \ 4[\log(1+2x)]^2}{2\sin 5x \ - \ 5\sin 2x}. = \lim_{x\to 0} \frac{-32x^3 + o(x^3)}{-35x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{32x^3}{35x^3} = \frac{32}{35}.$$

**Esercizio 4**

Esplicitiamo il valore assoluto che compare nell'espressione della funzione integranda osservando che

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x-3 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{se} \quad x-3 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 3. \end{cases}$$

Per questo scomponiamo il dominio di integrazione come segue

$$\int_2^4 (x-3)^{36} \ \arctan|x-3|^{37} \quad dx =$$

$$= - \int_2^3 (x-3)^{36} \ \arctan(x-3)^{37} \quad dx + \int_3^4 (x-3)^{36} \ \arctan(x-3)^{37} \quad dx.$$

Calcoliamo le primitive della funzione integrando per parti([1]) prendendo:

$$f'(x) = (x-3)^{36}, \quad g(x) = \arctan(x-3)^{37}, \text{ quindi } f(x) = \frac{1}{37}(x-3)^{37}, \quad g'(x) = \frac{37(x-3)^{36}}{1+(x-3)^{74}}.$$

Quindi

$$\int (x-3)^{36} \ \arctan(x-3)^{37} \ dx = \frac{1}{37}(x-3)^{37} \arctan(x-3)^{37} - \int \frac{(x-3)^{37}(x-3)^{36}}{1+(x-3)^{74}} \ dx =$$

$$= \frac{1}{37}(x-3)^{37} \arctan(x-3)^{37} - \int \frac{(x-3)^{73}}{1+(x-3)^{74}} \ dx.$$

[1]

$$\int f'(x)\, g(x) \ dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x) \ dx.$$

Risolviamo l'ultimo integrale con il cambio di variabile

$$t = 1 + (x-3)^{74}, \text{ quindi } dt = 74(x-3)^{73}\,dx$$

ed otteniamo

$$\int \frac{(x-3)^{73}}{1+(x-3)^{74}}\,dx = \frac{1}{74}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{74}\log t + C = \frac{1}{74}\log[1+(x-3)^{74}] + C.$$

Sostituendo negli integrali di partenza:

$$\int_2^4 (x-3)^{36}\ \arctan|x-3|^{37}\ dx =$$

$$= -\int_2^3 (x-3)^{36}\ \arctan(x-3)^{37}\,dx + \int_3^4 (x-3)^{36}\ \arctan(x-3)^{37}\ dx =$$

$$= -\left[\frac{1}{37}(x-3)^{37}\arctan(x-3)^{37} - \frac{1}{74}\log[1+(x-3)^{74}]\right]_2^3 +$$

$$+\left[\frac{1}{37}(x-3)^{37}\arctan(x-3)^{37} - \frac{1}{74}\log[1+(x-3)^{74}]\right]_3^4 =$$

$$= \frac{1}{37}\arctan 1 - \frac{1}{74}\log 2 + \frac{1}{37}\arctan 1 - \frac{1}{74}\log 2 =$$

$$= \frac{\pi}{74} - \frac{1}{37}\log 2.$$

## RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI DELLA FILA 2

**Esercizio 1**

Esprimiamo il numero $z = 1 + i$ in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, per questo determiniamo $\theta$ e $\rho$ utilizzando le formule:

$$\rho = \sqrt{(Re\,z)^2 + (Im\,z)^2}, \quad \cos\theta = \frac{Re\,z}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{Im\,z}{\rho},$$

quindi

$$\rho = \sqrt{2}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da questa deduciamo che l'argomento principale del numero complesso è $\theta = \frac{\pi}{4}$, quindi

$$z \;=\; \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \;+\; i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Calcoliamo $z^n$ mediante la formula di De Moivre:

$$z^n \;=\; 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos n\,\frac{\pi}{4} \;+\; i\,\sin n\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Risulta $z \in \mathbb{R}$ se la parte immaginaria è nulla, ovvero $\sin n\,\frac{\pi}{4} = 0$. Questo è verificato per i valori di $n$ tali che

$$n\,\frac{\pi}{4} \;=\; k\,\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Dovendo essere $n \in \mathbb{N}$, otteniamo che $n = 4k$, con $k \in \mathbb{N}$. Tenuto conto anche della seconda condizione richiesta: $200 < |z|^n < 300$, otteniamo che $n = 16$ in quanto $|z|^{16} = \rho^{16} = 2^8 = 256 < 300$ e $2^8 > 200$, mentre per $n \geq 8$ si verifica facilmente che $|z|^n > 300$, mentre per $n < 8$ risulta $|z|^n < 200$.

**Esercizio 2**

La funzione è composizione di una radice dispari con un polinomio, che sono definite entrambi su tutto $\mathbb{R}$, quindi $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. La funzione è pari in quanto

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 \,-\, 10\,|-x| \,+\, 24} = \sqrt[3]{x^2 \,-\, 10\,|x| \,+\, 24} = f(x).$$

È sufficiente studiare $f$ per $x \geq 0$, quindi mediante per simmetria rispetto a $x = 0$ otterremo il suo comportamento per $x < 0$.
Sia dunque $x \geq 0$, per cui possiamo scrivere l'espressione della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \,-\, 10\,x \,+\, 24}$$

Determiniamo il segno di $f$ risolvendo $f(x) \geq 0$, ovvero

$$\sqrt[3]{x^2 \,-\, 10\,x \,+\, 24} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \,-\, 10\,x \,+\, 24 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ oppure } x \geq 6.$$

Agli estremi del dominio risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{2 - \frac{10}{x} + \frac{24}{x^2}} = +\infty.$$

Per simmetria anche $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
La funzione non ammette asintoti all'infinito in quanto

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{1 - \frac{10}{x} + \frac{24}{x^2}}}{x} = 0.$$

Stesso risultato per $x$ che tende a $-\infty$.
Determiniamo gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{(x-5)}{\sqrt[3]{(x^2 - 10\,x + 24)^2}}$$

Da cui $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 5$. La funzione è decrescente per $0 \leq x \leq 5$ e crescente per $x \geq 5$. Il punto $x_0 = 5$ è di minimo relativo. Per simmetria:
la funzione è crescente per $-5 \leq x \leq 0$ e decrescente per $x \leq -5$. Il punto $x_1 = -5$ è di minimo relativo.
Osserviamo che la derivata prima non è definita dei punti $x = 4$ e $x = 6$, dove abbiamo

$$\lim_{x\to 4} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 6} f'(x) = +\infty.$$

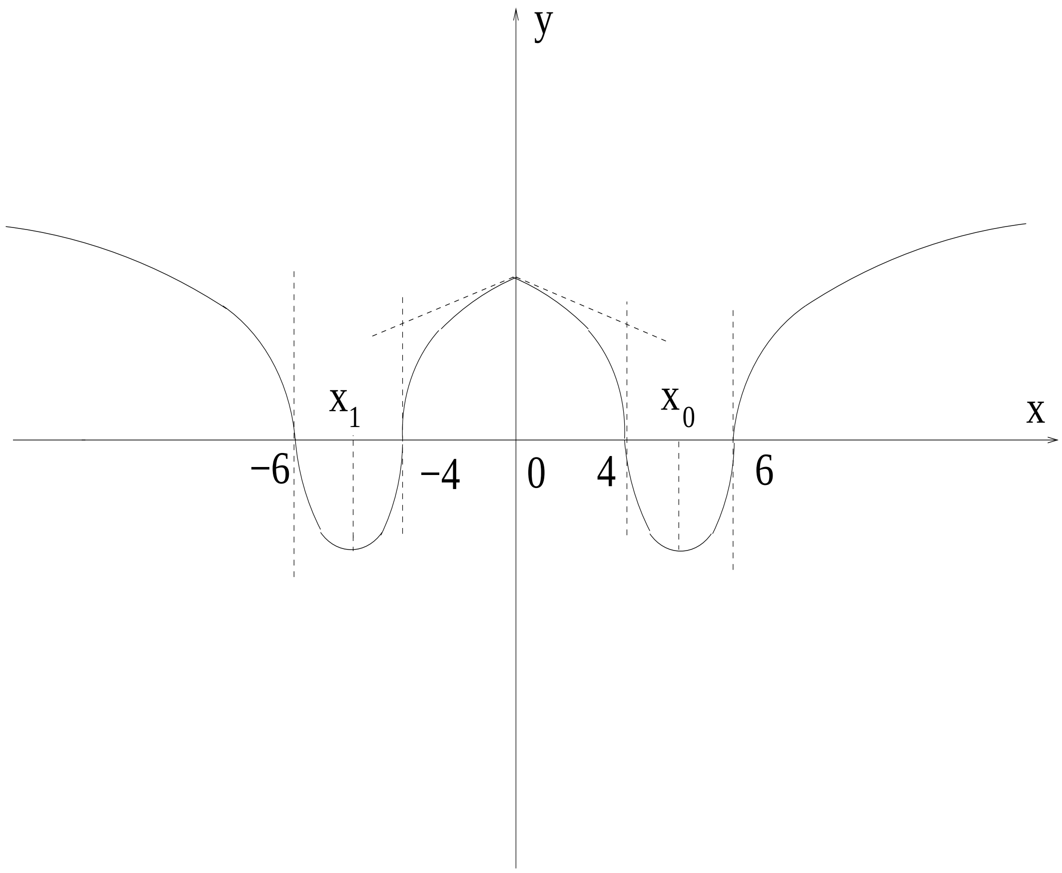
Per cui le rette $x = 4$ e $x = 6$ sono rette tangenti verticali al grafico di $f$.
Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{5}{6\sqrt[3]{9}}, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{5}{6\sqrt[3]{9}}$$

Si tratta dunque di un punto angoloso avente come tangente destra $y = -\dfrac{5}{6\sqrt[3]{9}}x + 2\sqrt[3]{3}$ e tangente sinistra $y = \dfrac{5}{6\sqrt[3]{9}}x - 2\sqrt[3]{3}$.
Determiniamo gli intervalli di concavità e convessità.

$$f''(x) = \frac{2}{9}\frac{-x^2 + 10x - 28}{\sqrt[3]{(x^2 - 10\,x + 24)^4}\sqrt[3]{x^2 - 10x + 24}}.$$

Il segno della derivata seconda è determinato dal termine posto al denominatore sotto la radice terza in quanto il polinomio al numeratore risulta sempre negativo avendo $\Delta < 0$. Quindi $f''(x) \geq 0$ per $4 \leq x \leq 6$. Di conseguenza la funzione è convessa sull'intervallo $[4, 6]$. Mentre è concava su $[0, 4]$ e su $[6, +\infty)$.
Per simmetria la funzione è convessa sull'intervallo $[-6, -4]$. Mentre è concava su $(-\infty, -6]$ e su $[-4, 0]$.
Possiamo quindi tracciare il seguente grafico.




**Esercizio 3**

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per risolverlo ricorriamo agli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione. Tenuto conto che

$$e^t \;=\; 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Se poniamo $t = -2x^2$ e sostituiamo:

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Consideriamo

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

e poniamo $t = 2x$

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

otteniamo
Essendo poi

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3),$$

per $t = 4x$ risulta

$$9\sin^2 4x = 9\left(4x - \frac{32}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 = 9\left[16x^2 - \frac{256}{3}x^4 + o(x^4)\right] = 144x^2 - 768x^4 + o(x^4);$$

mentre per $t = 3x$

$$16\sin^2 3x = 16\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right)^2 = 16\left[9x^2 - 27x^4 + o(x^4)\right] = 144x^2 - 432x^4 + o(x^4).$$

Sostituiamo nel limite applicando poi il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0} \frac{9\,\sin^2 4x\; - \;16\,\sin^2 3x}{e^{-2x^2} - \cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-336x^4 + o(x^4)}{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-336x^4}{\frac{4}{3}x^4} = -252.$$

**Esercizio 4**

Esplicitiamo il valore assoluto che compare nell'espressione della funzione integranda osservando che

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se} \quad x-2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{se} \quad x-2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 2. \end{cases}$$

Per questo scomponiamo il dominio di integrazione come segue

$$\int_1^3 |x-2|^{99}\ \arctan(x-2)^{100}\ \ dx =$$

$$= -\int_1^2 (x-2)^{99}\ \arctan(x-2)^{100}\ \ dx\ + \int_2^3 (x-2)^{99}\ \arctan|x-2|^{100}\ \ dx.$$

Calcoliamo le primitive della funzione integrando per parti(2) prendendo:

$$f'(x) = (x-2)^{99}, \quad g(x) = \arctan(x-2)^{100}, \text{ quindi } f(x) = \frac{1}{100}(x-2)^{100}, \quad g'(x) = \frac{100(x-2)^{99}}{1+(x-2)^{200}}.$$

Quindi

$$\int (x-2)^{99}\ \arctan(x-2)^{100}\ dx = \frac{1}{100}(x-2)^{100}\ \arctan(x-2)^{100} - \int \frac{(x-2)^{100}(x-2)^{99}}{1+(x-2)^{200}}\ dx =$$

$$= \frac{1}{100}(x-2)^{100}\ \arctan(x-2)^{100} - \int \frac{(x-2)^{199}}{1+(x-2)^{200}}\ dx.$$

---

2

$$\int f'(x)\,g(x)\ \ dx\ =\ f(x)\,g(x)\ -\ \int f(x)\,g'(x)\ \ dx.$$

Risolviamo l'ultimo integrale con il cambio di variabile

$$t = 1 + (x-2)^{200}, \text{ quindi } dt = 200(x-2)^{199}\,dx$$

ed otteniamo

$$\int \frac{(x-2)^{199}}{1+(x-2)^{200}}\,dx \;=\; \frac{1}{200}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{200}\log t + C \;=\; \frac{1}{200}\log[1+(x-2)^{200}] \,+\, C.$$

Sostituendo negli integrali di partenza:

$$\int_1^2 (x-2)^{99}\ \arctan|x-2|^{100}\ dx =$$

$$= -\int_1^2 (x-2)^{99}\ \arctan(x-2)^{100}\ dx + \int_2^3 (x-2)^{99}\ \arctan(x-2)^{100}\ dx =$$

$$= -\left[\frac{1}{100}(x-2)^{100}\ \arctan(x-2)^{100} - \frac{1}{200}\log[1+(x-2)^{200}]\right]_1^2 +$$

$$+\left[\frac{1}{100}(x-2)^{100}\ \arctan(x-2)^{100} - \frac{1}{200}\log[1+(x-2)^{200}]\right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{100}\arctan 1 - \frac{1}{200}\log 2 + \frac{1}{100}\arctan 1 - \frac{1}{200}\log 2 =$$

$$= \frac{\pi}{200} - \frac{1}{100}\log 2.$$

## RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI DELLA FILA 3

**Esercizio 1**

Esprimiamo il numero $z = -1+i\sqrt{3}$ in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, per questo determiniamo $\theta$ e $\rho$ utilizzando le formule:

$$\rho = \sqrt{(Re\, z)^2 + (Im\, z)^2}, \quad \cos\theta = \frac{Re\, z}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{Im\, z}{\rho},$$

quindi

$$\rho = 2, \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da questa deduciamo che l'argomento principale del numero complesso è $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$, quindi

$$z \;=\; 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi \;+\; i\,\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

Calcoliamo $z^n$ mediante la formula di De Moivre:

$$z^n \;=\; 2^n\left(\cos n\,\frac{2}{3}\pi \;+\; i\,\sin n\,\frac{2}{3}\pi\right)$$

Risulta $z \in \mathbb{R}$ se la parte immaginaria è nulla, ovvero $\sin n\,\dfrac{2}{3}\pi = 0$. Questo è verificato per i valori di $n$ tali che

$$n\,\frac{2}{3}\pi \;=\; k\,\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Dovendo essere $n \in \mathbb{N}$, otteniamo che $n = \frac{3}{2}k$, con $k \in \mathbb{N}$ pari. Tenuto conto anche della seconda condizione richiesta: $50 < |z|^n < 100$, otteniamo che $n = 6$ in quanto $|z|^6 = \rho^6 = 2^6 = 64 < 100$ e $2^6 > 50$, mentre per $n \geq 6$ si verifica facilmente che $|z|^n > 100$, inoltre per $n < 6$ risulta $|z|^n < 50$.

**Esercizio 2**

La funzione è composizione di una radice dispari con un polinomio, che sono definite entrambi su tutto $\mathbb{R}$, quindi $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. La funzione è pari in quanto

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 \,-\, 8\,|-x| \,+\, 15} = \sqrt[3]{x^2 \,-\, 8\,|x| \,+\, 15} = f(x).$$

È sufficiente studiare $f$ per $x \geq 0$, quindi mediante per simmetria rispetto a $x = 0$ otterremo il suo comportamento per $x < 0$.
Sia dunque $x \geq 0$, per cui possiamo scrivere l'espressione della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \,-\, 8\,x \,+\, 15}$$

Determiniamo il segno di $f$ risolvendo $f(x) \geq 0$, ovvero

$$\sqrt[3]{x^2 \,-\, 8\,x \,+\, 15} \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 \,-\, 8\,x \,+\, 15 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\; 0 \leq x \leq 3 \text{ oppure } x \geq 5.$$

Agli estremi del dominio risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{2 - \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}} = +\infty.$$

Per simmetria anche $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
La funzione non ammette asintoti all'infinito in quanto

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{1 - \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}}}{x} = 0.$$

Stesso risultato per $x$ che tende a $-\infty$.
Determiniamo gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{(x-4)}{\sqrt[3]{(x^2 - 8x + 15)^2}}$$

Da cui $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 4$. La funzione è decrescente per $0 \leq x \leq 4$ e crescente per $x \geq 4$. Il punto $x_0 = 4$ è di minimo relativo. Per simmetria:
la funzione è crescente per $-4 \leq x \leq 0$ e decrescente per $x \leq -4$. Il punto $x_1 = -4$ è di minimo relativo.
Osserviamo che la derivata prima non è definita dei punti $x = 3$ e $x = 5$, dove abbiamo

$$\lim_{x\to 3} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 5} f'(x) = +\infty.$$

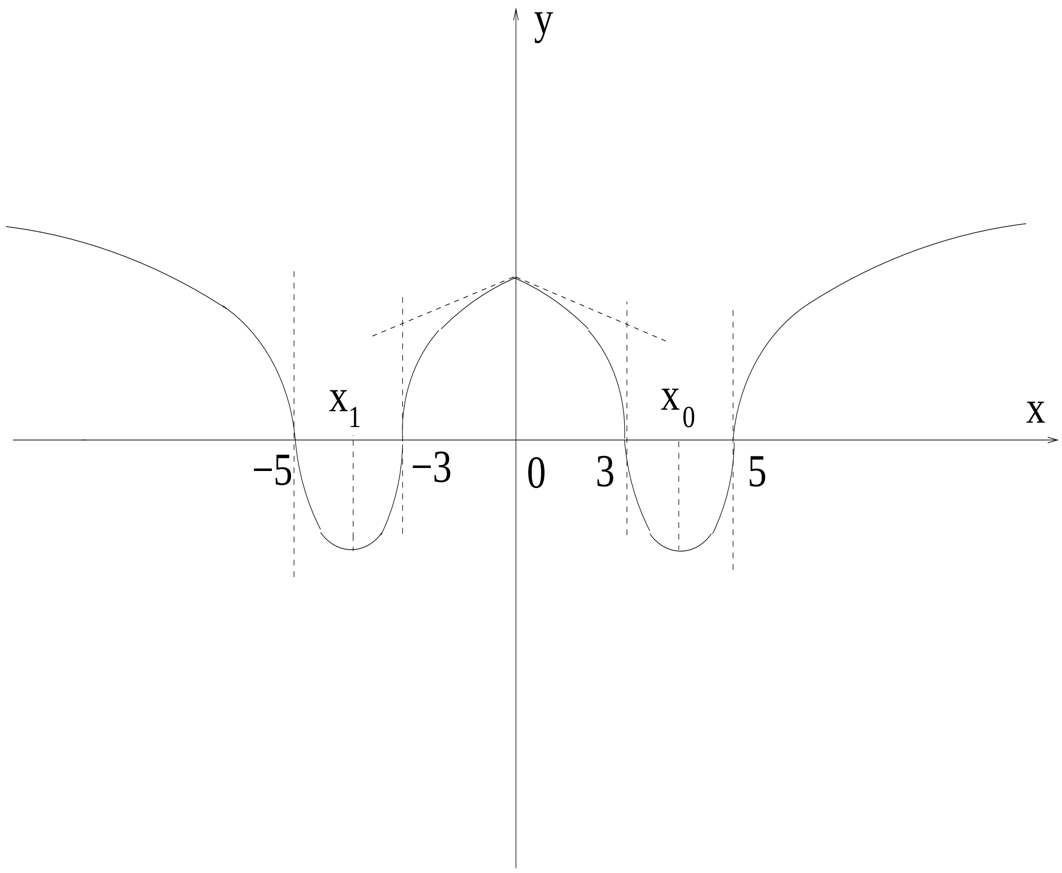
Per cui le rette $x = 3$ e $x = 5$ sono rette tangenti verticali al grafico di $f$.
Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{8}{3\sqrt[3]{225}}, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{8}{3\sqrt[3]{225}}$$

Si tratta dunque di un punto angoloso avente come tangente destra $y = -\frac{8}{3\sqrt[3]{225}}x + \sqrt[3]{15}$ e tangente sinistra $y = \frac{8}{3\sqrt[3]{225}}x + \sqrt[3]{15}$.
Determiniamo gli intervalli di concavità e convessità.

$$f''(x) = \frac{2}{9}\frac{-x^2 + 8x - 19}{\sqrt[3]{(x^2 - 8x + 15)^4}\sqrt[3]{x^2 - 8x + 15}}.$$

Il segno della derivata seconda è determinato dal termine posto al denominatore sotto la radice terza in quanto il polinomio al numeratore risulta sempre negativo avendo $\Delta < 0$. Quindi $f''(x) \geq 0$ per $3 \leq x \leq 5$. Di conseguenza la funzione è convessa sull'intervallo $[3, 5]$. Mentre è concava su $[0, 3]$ e su $[5, +\infty)$.
Per simmetria la funzione è convessa sull'intervallo $[-5, -3]$. Mentre è concava su $(-\infty, -5]$ e su $[-3, 0]$.
Possiamo quindi tracciare il seguente grafico.




**Esercizio 3**

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per risolverlo ricorriamo agli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione. Tenuto conto che

$$\log(1+t) \;=\; t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Se poniamo $t = 3x$ e sostituiamo:

$$\log(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2),$$

quindi

$$4[\log(1+3x)]^2 = 4[3x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)]^2 = 4[9x^2 - 27x^3 + o(x^3)] = 36x^2 - 108x^3 + o(x^3).$$

Mentre se poniamo $t = 6x$

$$\log(1+6x) = 6x - 18x^2 + o(x^2)$$

otteniamo

$$[\log(1+6x)]^2 = [6x - 18x^2 + o(x^2)]^2 = 36x^2 - 216x^3 + o(x^3)$$

Consideriamo poi

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3),$$

per $t = 6x$ risulta

$$\frac{1}{36}\sin^2 6x = \frac{1}{36}\left(6x - 36x^3 + o(x^3)\right)^2 = \frac{1}{36}\left[36x^2 - 432x^4 + o(x^4)\right] = x^2 - 12x^4 + o(x^4);$$

mentre per $t = 5x$

$$\frac{1}{25}\sin^2 5x = \frac{1}{25}\left(5x - \frac{125}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 = \frac{1}{25}\left[25x^2 - \frac{625}{3}x^4 + o(x^4)\right] = x^2 - \frac{25}{4}x^4 + o(x^4).$$

Sostituiamo nel limite applicando poi il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{36}\,\sin^2 6x\ -\ \frac{1}{25}\,\sin^2 5x}{4[\log(1+3x)]^2\ -\ [\log(1+6x)]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{61}{3}x^4 + o(x^4)}{108x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{61}{3}x^4}{108x^3} = 0.$$

**Esercizio 4**

Esplicitiamo il valore assoluto che compare nell'espressione della funzione integranda osservando che

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x-1\geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x\geq 1 \\[2ex] -(x-1) & \text{se} \quad x-1<0 \quad \Longleftrightarrow \quad x<1. \end{cases}$$

Per questo scomponiamo il dominio di integrazione come segue

$$\int_0^2 (x-1)^{24}\ \arctan|x-1|^{25}\quad dx\ =$$

$$= -\int_0^1 (x-1)^{24}\ \arctan(x-1)^{25}\quad dx\ +\int_1^2 (x-1)^{24}\ \arctan(x-1)^{25}\quad dx.$$

Calcoliamo le primitive della funzione integrando per parti([3]) prendendo:

$$f'(x) = (x-1)^{24},\quad g(x) = \arctan(x-1)^{25},\ \text{quindi}\ f(x) = \frac{1}{25}(x-1)^{25},\ \ g'(x) = \frac{25(x-1)^{24}}{1+(x-1)^{50}}.$$

Quindi

$$\int (x-1)^{24}\ \arctan(x-1)^{25}\ dx\ = \frac{1}{25}(x-1)^{25}\ \arctan(x-1)^{25}\ -\int \frac{(x-1)^{25}(x-1)^{24}}{1+(x-1)^{50}}\ dx\ =$$

$$= \frac{1}{25}(x-1)^{25}\ \arctan(x-1)^{25}\ -\int \frac{(x-1)^{49}}{1+(x-1)^{50}}\ dx.$$

[3]

$$\int f'(x)\,g(x)\ dx\ =\ f(x)\,g(x)\ -\int f(x)\,g'(x)\ dx.$$

Risolviamo l'ultimo integrale con il cambio di variabile

$$t = 1 + (x-1)^{50}, \text{ quindi } dt = 50(x-1)^{49}\, dx$$

ed otteniamo

$$\int \frac{(x-1)^{49}}{1+(x-2)^{50}}\ dx \ = \ \frac{1}{50}\int \frac{1}{t}\ dt = \frac{1}{50}\ \log t\ + C \ = \ \frac{1}{50}\ \log[1+(x-1)^{50}]\ +\ C.$$

Sostituendo negli integrali di partenza:

$$\int_0^2 (x-1)^{24}\ \ \arctan|x-1|^{25}\ \ dx\ =$$

$$= -\int_0^1 (x-1)^{24}\ \ \arctan(x-1)^{25}\ dx\ +\int_1^2 (x-1)^{24}\ \ \arctan(x-1)^{25}\ \ dx\ =$$

$$= -\ \left[\frac{1}{25}(x-1)^{25}\ \arctan(x-1)^{25}\ -\ \frac{1}{50}\ \log[1+(x-1)^{50}]\right]_0^1\ +$$

$$+\ \left[\frac{1}{25}(x-1)^{25}\ \arctan(x-1)^{25}\ -\ \frac{1}{50}\ \log[1+(x-1)^{50}]\right]_1^2\ =$$

$$= \frac{1}{25}\ \arctan 1\ -\ \frac{1}{50}\ \log 2\ +\ \frac{1}{25}\ \arctan 1\ -\ \frac{1}{50}\ \log 2\ =$$

$$= \frac{\pi}{50}\ -\ \frac{1}{25}\ \log 2.$$

## RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI DELLA FILA 4

**Esercizio 1**

Esprimiamo il numero $z = 2 + i2\sqrt{3}$ in forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, per questo determiniamo $\theta$ e $\rho$ utilizzando le formule:

$$\rho = \sqrt{(Re\,z)^2 + (Im\,z)^2}, \quad \cos\theta = \frac{Re\,z}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{Im\,z}{\rho},$$

quindi

$$\rho = 4, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da questa deduciamo che l'argomento principale del numero complesso è $\theta = \frac{\pi}{3}$, quindi

$$z \;=\; 4\left(\cos\frac{\pi}{3} \;+\; i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Calcoliamo $z^n$ mediante la formula di De Moivre:

$$z^n \;=\; 4^n\left(\cos\, n\,\frac{\pi}{3} \;+\; i\,\sin\, n\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Risulta $z \in \mathbb{R}$ se la parte immaginaria è nulla, ovvero $\sin\, n\,\frac{\pi}{3} = 0$. Questo è verificato per i valori di $n$ tali che

$$n\,\frac{\pi}{3} \;=\; k\,\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Dovendo essere $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, otteniamo che $n = 3k$, con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tenuto conto anche della seconda condizione richiesta: $|z|^n < 100$, otteniamo che $n = 3$ in quanto $|z|^3 = \rho^3 = 4^3 = 64 < 100$, mentre per $n \geq 4$ si verifica facilmente che $|z|^n > 100$.

**Esercizio 2**

La funzione è composizione di una radice dispari con un polinomio, che sono definite entrambi su tutto $\mathbb{R}$, quindi $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. La funzione è pari in quanto

$$f(-x) = \sqrt[3]{-2(-x)^2 \,+\, 14\,|-x| \,-\, 24} = \sqrt[3]{-2x^2 \,+\, 14\,|x| \,-\, 24} = f(x).$$

È sufficiente studiare $f$ per $x \geq 0$, quindi mediante per simmetria rispetto a $x = 0$ otterremo il suo comportamento per $x < 0$.
Sia dunque $x \geq 0$, per cui possiamo scrivere l'espressione della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{-2x^2 \,+\, 14\,x \,-\, 24}$$

Determiniamo il segno di $f$ risolvendo $f(x) \geq 0$, ovvero

$$\sqrt[3]{-2x^2 \,+\, 14\,x \,-\, 24} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x^2 \,+\, 14\,x \,-\, 24 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \leq x \leq 4.$$

Agli estremi del dominio risulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{2 \,-\, \frac{14}{x} \,+\, \frac{24}{x^2}} = -\infty.$$

Per simmetria anche $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
La funzione non ammette asintoti all'infinito in quanto

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{2 - \frac{14}{x} + \frac{24}{x^2}}}{x} = 0.$$

Stesso risultato per $x$ che tende a $-\infty$.
Determiniamo gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,\frac{-(2x-7)}{\sqrt[3]{(-2x^2 + 14\,x - 24)^2}}$$

Da cui $f'(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$. La funzione è crescente per $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$ e decrescente per $x \geq \frac{7}{2}$. Il punto $x_0 = \frac{7}{2}$ è di massimo relativo. Per simmetria:
la funzione è decrescente per $-\frac{7}{2} \leq x \leq 0$ e crescente per $x \leq -\frac{7}{2}$. Il punto $x_1 = -\frac{7}{2}$ è di massimo relativo.
Osserviamo che la derivata prima non è definita dei punti $x = 3$ e $x = 4$, dove abbiamo

$$\lim_{x\to3} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to4} f'(x) = -\infty.$$

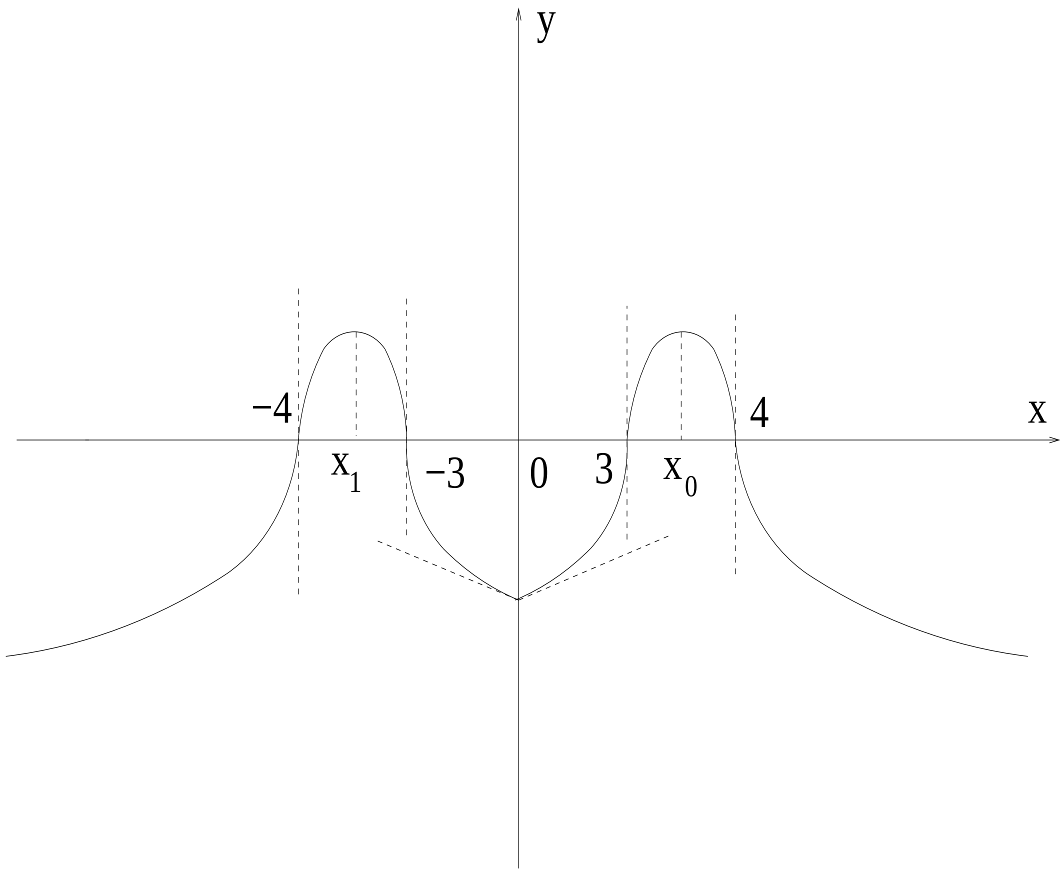
Per cui le rette $x = 3$ e $x = 4$ sono rette tangenti verticali al grafico di $f$.
Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile in quanto

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{7}{4\sqrt[3]{9}}, \quad \lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{7}{4\sqrt[3]{9}}$$

Si tratta dunque di un punto angoloso avente come tangente destra $y = \frac{7}{4\sqrt[3]{9}}x - 2\sqrt[3]{3}$ e tangente sinistra $y = -\frac{7}{4\sqrt[3]{9}}x - 2\sqrt[3]{3}$.
Determiniamo gli intervalli di concavità e convessità.

$$f''(x) = \frac{2}{9}\,\frac{-4x^2 - 28x - 52}{\sqrt[3]{(-2x^2 + 14\,x - 24)^4}\sqrt[3]{-2x^2 + 14x - 24}}.$$

Il segno della derivata seconda è determinato dal termine posto al denominatore sotto la radice terza in quanto il polinomio al numeratore risulta sempre negativo avendo $\Delta < 0$. Quindi $f''(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 3$ e $4 \leq x$ Di conseguenza la funzione è convessa sull'intervallo $[0, 3]$ e sull'intervallo $[4, +\infty)$. Mentre è concava su $[3, 4]$.
Per simmetria la funzione è convessa sull'intervallo $[-3, 0]$ e sull'intervallo $[-\infty, -4]$. Mentre è concava su $[-4, -3]$.
Possiamo quindi tracciare il seguente grafico.




**Esercizio 3**

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per risolverlo ricorriamo agli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione. Tenuto conto che

$$\log(1+t) \; = \; t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Se poniamo $t = 3x^2$ e sostituiamo:

$$2\log(1+3x^2) = 6x^2 - 9x^4 + o(x^4),$$

Mentre se poniamo $t = 2x^2$ risulta

$$3\log(1+2x^2) = 6x^2 - 6x^4 + o(x^4)$$

Consideriamo poi

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3),$$

per $t = 3x$ abbiamo

$$4\sin^2 3x = 4\left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right)^2 = 4\left[9x^2 - 27x^4 + o(x^4)\right] = 36x^2 - 108x^4 + o(x^4);$$

mentre per $t = 2x$

$$9\sin^2 2x = 9\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 = 9\left[4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + o(x^4)\right] = 36x^2 - 48x^4 + o(x^4).$$

Sostituiamo nel limite applicando poi il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\log(1+3x^2)\;-\;3\,\log(1+2x^2)}{4\sin^2 3x\;-\;9\sin^2 2x} == \lim_{x\to 0} \frac{-3x^4 + o(x^4)}{-60x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^4}{-60x^4} = \frac{1}{20}.$$

**Esercizio 4**

Esplicitiamo il valore assoluto che compare nell'espressione della funzione integranda osservando che

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se} \quad x-4 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 4 \\ \\ -(x-4) & \text{se} \quad x-4 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 4. \end{cases}$$

Per questo scomponiamo il dominio di integrazione come segue

$$\int_3^5 |x-4|^{20}\ \arctan(x-4)^{21}\quad dx\ =$$

$$= -\int_3^4 (x-4)^{20}\ \arctan(x-4)^{21}\quad dx\ +\int_4^5 (x-4)^{20}\ \arctan|x-4|^{21}\quad dx.$$

Calcoliamo le primitive della funzione integrando per parti($^4$) prendendo:

$$f'(x) = (x-4)^{20}, \quad g(x) = \arctan(x-4)^{21}, \text{ quindi } f(x) = \frac{1}{21}(x-4)^{21}, \quad g'(x) = \frac{21(x-4)^{20}}{1+(x-2)^{42}}.$$

Quindi

$$\int (x-4)^{20}\ \arctan(x-4)^{21}\ dx\ = \frac{1}{21}(x-4)^{21}\ \arctan(x-4)^{21}\ - \int \frac{(x-4)^{21}(x-4)^{20}}{1+(x-4)^{42}}\ dx\ =$$

$$= \frac{1}{21}(x-4)^{21}\ \arctan(x-4)^{21}\ - \int \frac{(x-4)^{41}}{1+(x-4)^{42}}\ dx.$$

Risolviamo l'ultimo integrale con il cambio di variabile

$$t = 1+(x-4)^{42}, \text{ quindi } dt = 42(x-2)^{41}\,dx$$

ed otteniamo

---

4

$$\int f'(x)\,g(x)\ \ dx\ =\ f(x)\,g(x)\ -\int f(x)\,g'(x)\ \ dx.$$

$$\int \frac{(x-4)^{41}}{1+(x-2)^{42}}\ dx \ = \ \frac{1}{42}\int \frac{1}{t}\ \ dt = \frac{1}{42}\ \log t\ + C \ = \ \frac{1}{42}\ \log[1+(x-4)^{42}]\ +\ C.$$

Sostituendo negli integrali di partenza:

$$\int_3^5 (x-4)^{20}\ \ \arctan|x-4|^{21}\ \ dx \ =$$

$$= - \int_3^4 (x-4)^{20}\ \ \arctan(x-4)^{21}\ dx\ +\ \int_4^5 (x-4)^{41}\ \ \arctan(x-4)^{42}\ \ dx\ =$$

$$= - \left[\frac{1}{21}(x-4)^{21}\ \arctan(x-4)^{21}\ -\ \frac{1}{42}\ \log[1+(x-4)^{42}]\right]_3^4\ +$$

$$+ \left[\frac{1}{21}(x-4)^{21}\ \arctan(x-4)^{21}\ -\ \frac{1}{42}\ \log[1+(x-4)^{42}]\right]_4^5\ =$$

$$= \frac{1}{21}\ \arctan 1\ -\ \frac{1}{42}\ \log 2\ +\ \frac{1}{21}\ \arctan 1\ -\ \frac{1}{42}\ \log 2\ =$$

$$= \frac{\pi}{42}\ -\ \frac{1}{21}\ \log 2.$$