Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 16 settembre 2017

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 6) Dimostrare per induzione

$$3^n > 2^n + 5^{\frac{n}{2}}, \quad \forall\, n \geq 3.$$

2. (Punti 10) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 27x}$$

a) (punti 2) determinare il suo campo di esistenza, comportamento agli estremi del dominio ed eventuali asintoti;

b) (punti 2) determinare l'insieme dove è derivabile;

b) (punti 2) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) (punti 2) determinare gli intervalli di concavità e di convessità ed eventuali flessi;

d) (punti 2) disegnare il suo grafico approssimato.

3. (Punti 7) Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} |\cos x| \quad \arctan|\sin x| \;\, dx.$$

4. (punti 7)
Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[5]{n^3+1} - \sqrt[5]{n^3}).$$

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

Esercizio 1.
Per $n = 3$ è banalmente verificata:

$$3^3 \,>\, 2^3 \,+\, 5^{\frac{3}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad 19 \,>\, 5^{\frac{3}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad 361 \,>\, 125.$$

Verifichiamo l'induttività della proposizione.

$$3^{n+1} \,=\, 3 \,\cdot\, 3^n \,>\, 3\,(2^n \,+\, 5^{\frac{n}{2}}) \text{ (per l'ipotesi induttiva).}$$

Otteniamo la tesi provando:

$$3\,(2^n \,+\, 5^{\frac{n}{2}}) \,>\, 2^{n+1} \,+\, 5^{\frac{n+1}{2}}.$$

Questa è vera perchè:

$$3\,(2^n \,+\, 5^{\frac{n}{2}}) \,>\, 2^{n+1} \,+\, 5^{\frac{n+1}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \cdot 2^n \,+\, 3 \cdot 5^{\frac{n}{2}} \,>\, 2 \cdot 2^n \,+\, 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{n}{2}} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2^n \,+\, (3 \,-\, 5^{\frac{1}{2}})\, 5^{\frac{n}{2}} \,>\, 0.$$

Questa è banalmente verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi anche per ogni $n \geq 3$, dato che è somma di quantità positive essendo $3 > 5^{\frac{1}{2}}$.

Esercizio 2.
La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ed è una funzione dispari: $f(-x) = -f(x)$. Il segno di f si determina risolvendo $x^2 - 27 > 0$. Quindi $f(x) > 0$ per $-3\sqrt{3} < x < 0$ oppure $x > 3\sqrt{3}$. $f(x) < 0$ negli altri intervalli. Nei punti $-3\sqrt{3}$, 0, $3\sqrt{3}$ la funzione si annulla.
Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Vediamo se f ammette asintoti obliqui $y = mx + q$.

$$m \,=\, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \,=\, \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27x}}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx \,=\, \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 27x} \,-\, x \,=$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} x \left[\sqrt[3]{1 - \frac{27}{x^2}} - 1 \right] =$$

(utilizziamo lo sviluppo di Taylor $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ con $\alpha = \frac{1}{3}$ e $t = -\frac{27}{x^2}$)

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x \left[1 - \frac{9}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = 0.$$

Quindi la funzione ammette come asintoto obliquo, per x che tenda a $+\infty$ e per x che tende a $-\infty$, la retta di equazione

$$y \,=\, x.$$

Studio della derivata prima.
La funzione è derivabile per ogni $x \notin \{-3\sqrt{3};\, 0;\, 3\sqrt{3}\}$ perchè composizione di funzioni derivabili. Nei punti $-3\sqrt{3}$, 0, $3\sqrt{3}$ si annulla la radice. La funzione radice non è derivabile nello zero:

$$\sqrt[3]{x^3 - 27x} = \sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{x + 3\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{x - 3\sqrt{3}}.$$

In particolare, essendo

$$f'(x) = \frac{x^2\ -\ 9}{\sqrt[3]{(x^3 - 27x)^2}},$$

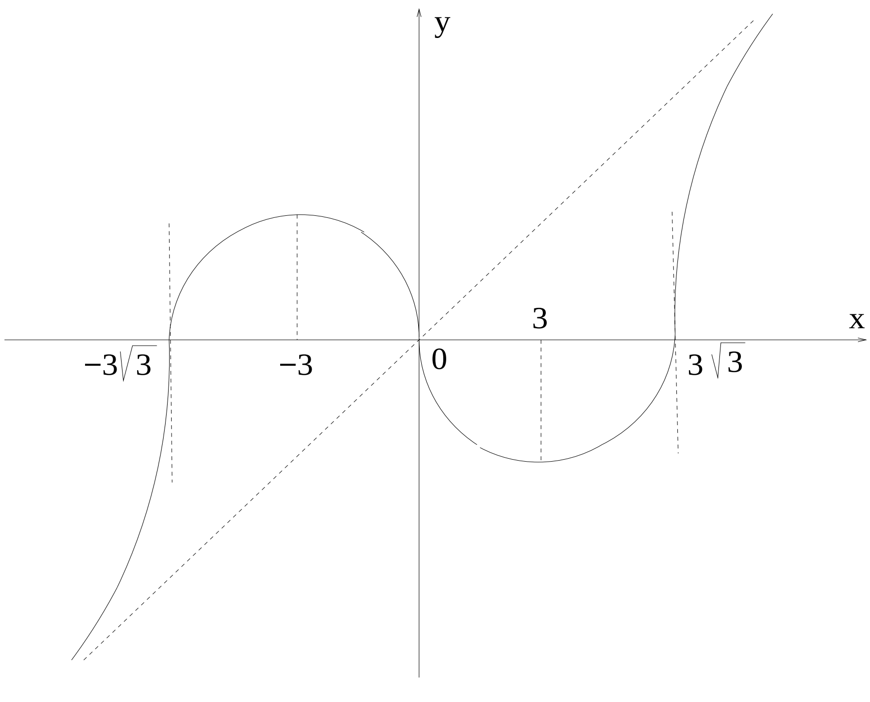
risulta

$$\lim_{x \to -3\sqrt{3}} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 3\sqrt{3}} f'(x) = +\infty.$$

Osserviamo che i punti $x = -3$ e $x = 3$ sono stazionari, mentre $f'(x) > 0$ se $x < -3$ oppure $x > 3$, $f'(x) < 0$ se $-3 < x < 3$, quindi la funzione risulta crescente sulle semirette $(-\infty, 3)$ e $(3, +\infty)$, decrescente sull'intervallo $(-3, 3)$. Il punto $x = -3$ è di massimo relativo, il punto $x = 3$ è di minimo relativo.
Calcolo della derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-18x^2\ -\ 162}{\sqrt[3]{(x^3 - 27)^2}\ (x^3 - 27)}$$

Osserviamo che il numeratore risulta sempre negativo, mentre il segno del denominatore è lo stesso di quello della funzione, Quindi il segno di f'' è opposto a quello di f, ovvero $f''(x) < 0$ per $-3\sqrt{3} < x < 0$ oppure $x > 3\sqrt{3}$. $f''(x) > 0$ negli altri intervalli. Non ci sono flessi. Da questo deduciamo che f è concava per $-3\sqrt{3} < x < 0$ oppure $x > 3\sqrt{3}$ mentre è convessa negli altri intervalli.



Esercizio 3.

Esplicitiamo i moduli tenendo conto del segno delle funzioni che vi compaiono.

$$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos x \quad \arctan \sin x \; dx \; + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \quad \arctan \sin x \; dx \; - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos x \quad \arctan \sin x \; dx.$$

Determiniamo le primitive integrando per parti.

$$\int \cos x \;\; \arctan \sin x \; dx \; = \; \sin x \;\; \arctan \sin x \; - \int \frac{\sin x \; \cos x}{1 \, + \, \sin^2 x} \; dx.$$

Effettuiamo il cambio di variabile $t = \sin x$, quindi $dt = \cos x \; dx$.

$$\int \frac{t}{1+t^2} \; dt \; = \; \frac{1}{2} \log(1+t^2) \; + \; C$$

Quindi

$$\int \cos x \;\; \arctan \sin x \; dx \; = \; \sin x \;\; \arctan \sin x \; - \; \frac{1}{2} \log(1+\sin^2 x) \; + \; C.$$

Tenuto conto di questo possiamo scrivere

$$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos x \quad \arctan \sin x \; dx \; = \; \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} \; - \; \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}.$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \quad \arctan \sin x \; dx \; = \; \frac{\pi}{4} \; - \; \frac{1}{2} \log 2.$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos x \quad \arctan \sin x \; dx \; = \; -\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} \; + \; \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} \; + \; \frac{\pi}{4} \; - \; \frac{1}{2} \log 2.$$

Infine

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} |\cos x| \quad \arctan |\sin x| \; dx = \; \frac{\pi}{2} \; - \; \log 2.$$

Esercizio 4.

Stabiliamo l'andamento all'infinito del termine generale della serie.

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt[5]{n^3+1} - \sqrt[5]{n^3}) \; = \; \lim_{n \to +\infty} \sqrt[5]{n^3} \left(\sqrt[5]{1 + \frac{1}{n^3}} \; - \; 1 \right)$$

Risolviamo l'indeterminatezza del limite mediante lo sviluppo di Taylor $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, prendendo $\alpha = \frac{1}{5}$ e $x = \frac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[5]{n^3} \left(\sqrt[5]{1 + \frac{1}{n^3}} \; - \; 1 \right) \; = \; \lim_{n \to +\infty} \sqrt[5]{n^3} \left(1 \; + \; \frac{1}{5} \frac{1}{n^3} \; + \; o\left(\frac{1}{n^3}\right) \; - \; 1 \right) \; =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x^3} = \frac{1}{5} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{12}{5}}} = 0.$$

Questo calcolo non ci fornisce solo l'informazione che il termine generale della serie è infinitesimo, e quindi è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, ma anche che tende a zero come $\frac{1}{n^{\frac{12}{5}}}$. Infatti applicando il criterio del confronto asintotico, dato che la serie è a termini positivi, con lo stesso sviluppo fatto sopra abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3+1} - \sqrt[5]{n^3}}{\frac{1}{n^{\frac{12}{5}}}} = \frac{1}{5}.$$

Ovvero ha il termine generale ha lo stesso andamento di quello della serie armonica con esponente $\frac{12}{5} > 1$, quindi la serie converge.