Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta del 23 febbraio 2016

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

1. (Punti 8) Sia data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 1}{a_n + 2}, & n \in \mathbb{N} \\ a_0 = 2, \end{cases}$$

a) dimostrare che risulta $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$;

b) dimostrare che è limitata superiormente;

c) dimostrare che è monotona crescente;

d) calcolarne il limite.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x})^2}{\log(1 + \sin x^2)}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 2x + 5),$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá, i punti di flesso e le equazioni delle rette tangenti al grafico di f nei punti di flesso;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

4. (punti 8) Calcolare

$$\int_3^8 \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \, dx$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

1. (Punti 8) Sia data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & \dfrac{4a_n + 1}{a_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ a_0 & = & 2, \end{cases}$$

a) dimostrare che risulta $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n > 0$;

b) dimostrare che è limitata superiormente;

c) dimostrare che è monotona crescente;

d) calcolarne il limite.

Svolgimento.

a) Verifichiamo la proposizione per induzione.
Il primo passo $a_0 > 0$ è ovvio. Anche l'induttivitá è semplice da provare perché se supponiamo che $a_n > 0$ ottiene banalmente che $a_{n+1} > 0$ in quanto la definizione ricorsiva di a_{n+1} è costituita da somme e da un rapporto di quantitá positive.

b) Dimostriamo per induzione che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $a_n < M$. Il primo passo è verificato se iniziamo imponendo come condizione che $M > a_0 = 2$. Determiniamo in modo piú preciso M in modo che valga l'implicazione: se $a_n < M$ allora $a_{n+1} < M$. Per fare questo osserviamo che, come conseguenza della positivitá della successione provata nel punto a), possiamo scrivere

$$a_{n+1} = \frac{4\,a_n + 1}{a_n + 2} < M \iff 4\,a_n + 1 < M\,a_n + M\,2 \iff 1 < a_n(M-4) + 2\,M.$$

Che è vera se $M \geq 4$. La tesi è dunque provata.

c) Anche la monotonia si dimostra per induzione.
Il primo passo è ovvio: $a_0 = 2 < a_1 = \frac{9}{2}$.
L'induttivitá: $a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_n < a_{n+1}$ si prova in due modi differenti.
Primo metodo: utilizzando direttamente la definizione ricorsiva:

$$a_{n-1} < a_n \Longrightarrow a_n = \frac{4a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 2} < a_{n+1} = \frac{4a_n + 1}{a_n + 2} \iff$$

$$(4a_{n-1} + 1)(a_n + 2) < (4a_n + 1)(a_{n-1} + 2) \iff$$

$$\iff 8a_{n-1} + a_n < 8a_n + a_{n-1} \iff 7a_{n-1} < 7a_n,$$

che è verificata per l'ipotesi induttiva.

Secondo metodo: utilizzando la funzione associata alla definizione ricorsiva, ovvero

$$f(x) = \frac{4x + 1}{x + 2}.$$

Poiché

$$f'(x) = \frac{7}{(x + 2)^2} > 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},$$

allora per $x > -2$ la funzione è crescente. In particolare per ogni $x_1,\, x_2 > 0$,
se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$.
Quindi, poiché come abbiamo visto $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
se $a_{n-1} < a_n$ allora $a_n = f(a_{n-1}) < a_{n+1} = f(a_n)$.

d) Abbiamo dimostrato che la successione risulta monotona crescente e limitata superiormente; di conseguenza, per il teorema di regolaritá delle funzioni monotone, essa ammette limite $L \in \mathbb{R}$. Questo numero risolve l'equazione ottenuta passando al limite nella definizione ricorsiva, ovvero

$$L = \frac{4L + 1}{L + 2}, \iff L^2 - 2L - 1 = 0$$

Le soluzioni sono $L_1 = 1 - \sqrt{5}$ e $L_2 = 1 + \sqrt{5}$.
L_1 non è accettabile essendo la successione crescente e positiva.
Dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 + \sqrt{5}$.

2. (punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x})^2}{\log(1 + \sin x^2)}.$$

Svolgimento.

Poiché il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ utilizziamo gli viluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$
per $t = \sqrt{x}$
$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}x + o(x)$

$$e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x} + \tfrac{1}{2}x + o(x) - 1 - \sqrt{x} = \tfrac{1}{2}x + o(x)$$

$$\left[e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}\right]^2 = \left[\frac{1}{2}x + o(x)\right]^2 = \frac{1}{4}x^2 + xo(x) + o(x^2) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2).$$

$\sin t = t + o(t)$
per $t = x^2$
$\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$
$\log(1+t) = t + o(t)$
posto $t = \sin x^2 = x^2 + o(x^2)$
$\log(1+\sin x^2) = x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$
perché $o(x^2 + o(x^2)) = o(x^2)$(vedi algebra degli o-piccoli)

Sostituendo nel limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x})^2}{\log(1 + \sin x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$\text{(per il principio di sostituzione degli infinitesimi)} \tag{1}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{4}x^2}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

3. (punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 2x + 5),$$

a) determinare il suo campo di esistenza ed eventuali asintoti;

b) determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o di minimo relativo;

c) determinare gli intervalli di concavitá e di convessitá, i punti di flesso e le equazioni delle rette tangenti al grafico di f nei punti di flesso;

d) disegnare il suo grafico approssimato.

Svolgimento.

a) Il campo di esistenza è determinato dai valori di x per i quali $x^2 + 2x + 5 > 0$. Essendo il discriminante di questo polinomio di secondo grado sempre negativo, la diseguaglianza è verificata per ogni x reale. Il campo di esistenza di f è $\mathbb{R}$.
I seguenti limiti stabiliscono il comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Vediamo se esistono asintoti obliqui $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Non esitono asintoti obliqui.

b) Determiniamo gli intervalli di monotonia di f studiando il segno di f'.

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}.$$

Risulta $f'(x) > 0$, ovvero $\frac{2x+2}{x^2+2x+5} > 0$ per $x > -1$ e, ovviamente, $f'(x) < 0$ per $x < -1$.
La funzione decresce nella semiretta $(-\infty, -1)$ e cresce in $(-1, +\infty)$. Il punto $x_1 = -1$ non é solo di minimo relativo ma anche assoluto.
c) Determiniamo gli intervalli di concavitá e/o di convessitá di f studiando il segno di f''.

$$f''x = \frac{-2(x^2+2x-3)}{(x^2+2x+5)^2}$$

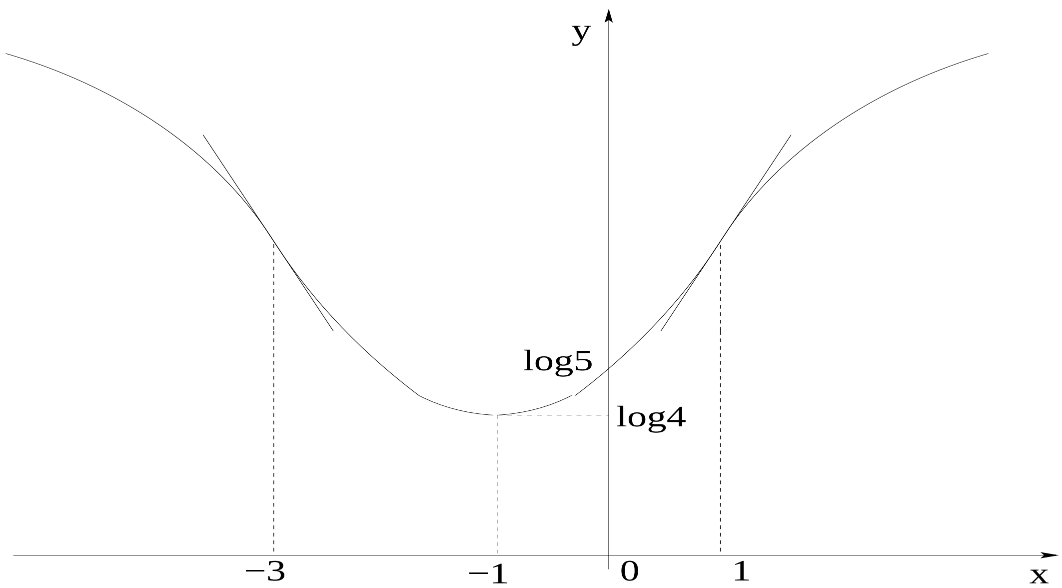
Risulta $f''(x) > 0$ per $x^2+2x-3 < 0$ ovvero per $-3 < x < 1$, quindi la funzione è convessa nell'intervallo $(-3, 1)$, concava in $(-\infty, -3)$ e $(1, +\infty)$. I punti $x_2 = -3$ e $x_3 = 1$ sono di flesso. Le rette tangenti nei punti di flesso sono, rispettivamente

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2), \quad y = f(x_3) + f'(x_3)(x - x_3)$$

ovvero

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \log 8, \quad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \log 8.$$

d) In base a quanto trovato sopra possiamo disegnare il grafico di f.



4. (punti 8) Calcolare

$$\int_3^8 \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \; dx$$

Svolgimento.

Effettuiamo il cambio di variabile:
$t = \sqrt{x+1}$ quindi $x = t^2 - 1$ e $dx = 2t\,dt$. Per $x = 3$ risulta $t = 2$, mentre per $x = 8$ risulta $t = 3$. Sostituendo otteniamo

$$\int_3^8 \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \; dx \; = \; \int_2^3 \frac{e^t}{t}\, 2t \; dt \; = \; 2 \int_2^3 e^t \; dt \; = \; 2 \, \left[e^t \right]_2^3 \; = \; 2 \left(e^3 - e^2 \right).$$